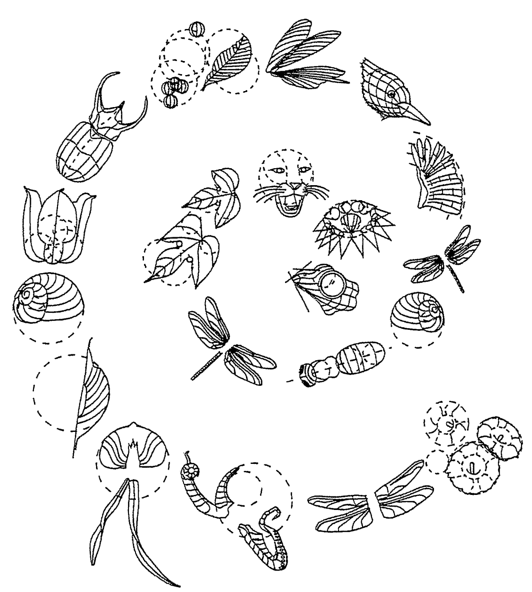
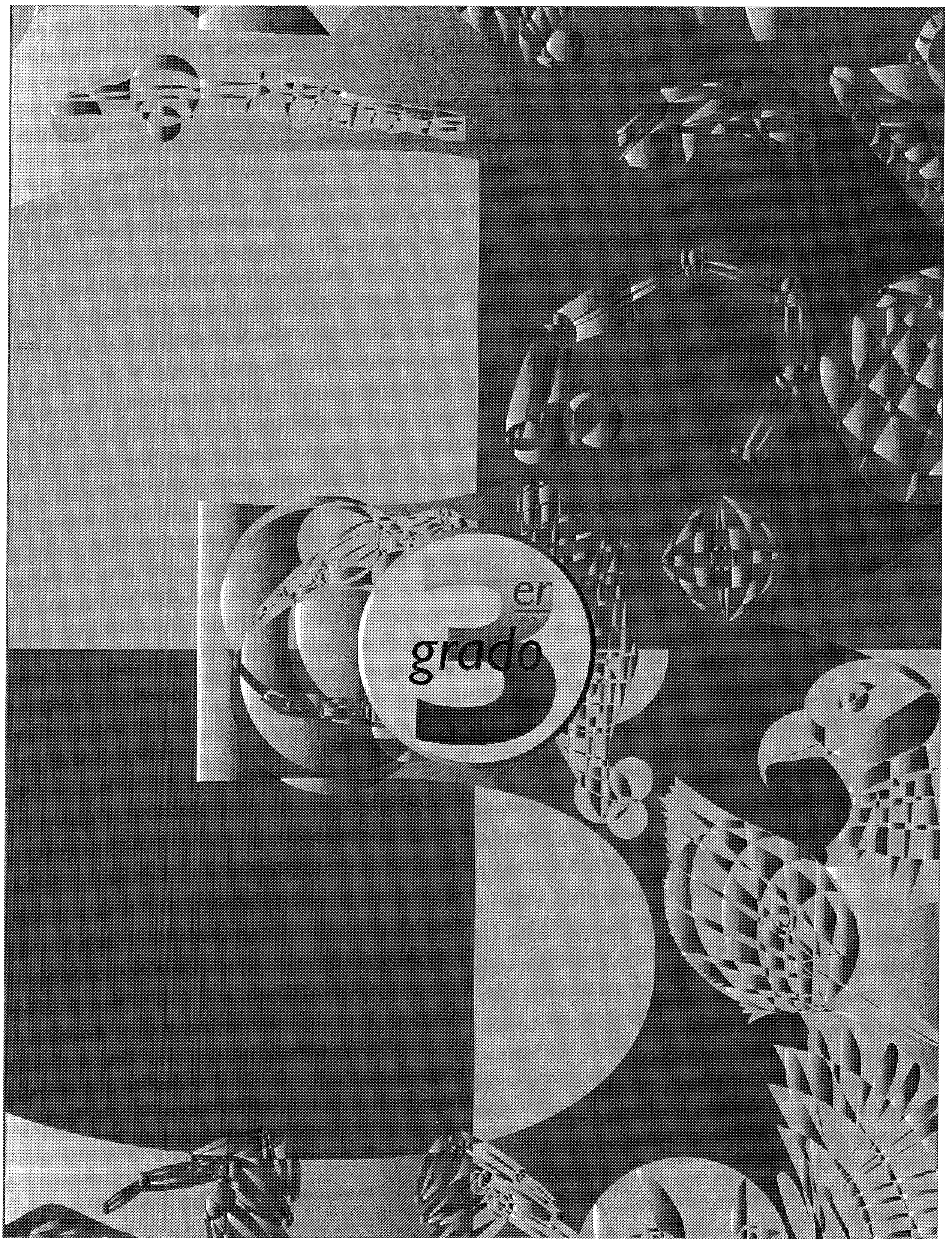
Fichero de actividades didácticas

Matemáticas

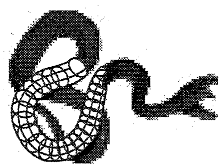
Educación secundaria




3er
grado

Los clavos y las áreas

Tema 1: Proporcionalidad y funciones lineales



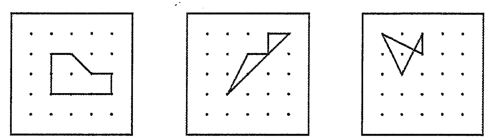
Propósito Utilizar constantemente los diversos medios de expresión matemática (lenguaje algebraico, tablas y gráficas) en el planteamiento y solución de problemas muy diversos y, en casos sencillos, desarrollar criterios para pasar de unos a otros.

Contenidos Ejemplos de variación lineal. Uso de una tabla y una gráfica para explorar si dos cantidades varían linealmente. En casos sencillos, paso de una tabla o gráfica a la expresión algebraica de una función.

Material Un geoplano y ligas por cada alumno.

1 Organice al grupo en equipos de cuatro alumnos y propóngales que realicen la primera parte de la siguiente actividad. Una vez que se haya discutido en grupo esta primera parte, lleve a cabo (con los mismos equipos) la segunda.

Primera parte:
Formen en el geoplano polígonos que cumplan con estas condiciones:
a) El polígono debe tener en su interior un clavo.
b) La liga no debe cruzarse consigo misma.



Aceptable *No aceptable* *No aceptable*

Cuando la mayoría de los equipos termine, pida que, por cada polígono construido, calculen el área* y cuenten el número de clavos que hay en el perímetro. Anote los datos en el pizarrón y destaque lo siguiente: Todos los polígonos tienen un clavo en el interior. No todos tienen el mismo número de clavos en el perímetro. No todos tienen igual área.

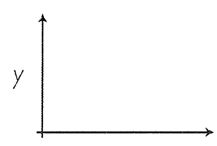
Segunda parte:
Con las mismas condiciones a) y b), formen en el geoplano polígonos con el número de clavos indicado por x en la tabla.

x	y
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

x = número de clavos en el perímetro
y = área del polígono resultante

Polígonos con un clavo en el interior.

Una vez que hayan completado la tabla, planteen y respondan lo siguiente:
- *¿Se reconoce algún patrón en la forma de variación de y cuando varía x?*
- *Localicen en un plano cartesiano los puntos de la tabla anterior.*
- *¿Son colineales estos puntos?*
- *Construyan una expresión algebraica que relacione y con x.*

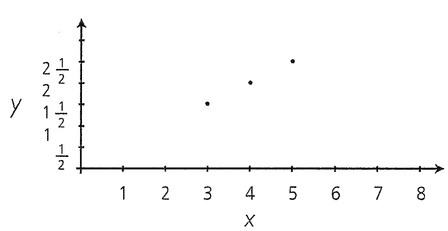


Los alumnos, al haberlo explorado en su geoplano, se darán cuenta de que a un determinado número de clavos en el perímetro le corresponde una cierta área. La tabla, ya completa, debe quedar así:

Polígonos con un clavo en el interior.

x	y
3	$1\frac{1}{2}$
4	2
5	$2\frac{1}{2}$
6	3
7	$3\frac{1}{2}$
8	4
9	$4\frac{1}{2}$
10	5

Localizando estos puntos:

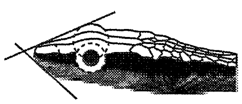


---

* Se recomienda que, antes de llevar a cabo las actividades propuestas en esta ficha, los alumnos, si no lo han hecho, trabajen con el cálculo de áreas en el geoplano.

Fórmulas

Tema 2: Ecuaciones y problemas



Propósitos Despejar literales en diferentes tipos de fórmulas. Relacionar una fórmula con la tabla de datos que genera y con su gráfica.

Contenidos Actividades sencillas de despeje de literales; por ejemplo: despejar y de $xy = c$; despejar x de $xy - 1 = 1$, etcétera.

Material Hojas de papel milimétrico.

1 Señale que los siguientes problemas se van a resolver en equipos de tres o cuatro integrantes.

a) El perímetro de un cuadrado mide 6 m, ¿cuánto mide un lado del cuadrado?
b) Escriban la expresión algebraica que relaciona el valor de un lado del cuadrado con el valor del perímetro.
c) Una vez que hayan escrito la expresión, propongan al menos 10 valores para el perímetro: calculen el valor de un lado y registren los resultados en una tabla como la que se muestra.

Valor del perímetro	Valor que corresponde a un lado

d) Con los valores obtenidos construyan una gráfica en el plano cartesiano, en cuyo eje vertical anoten los valores de un lado del cuadrado y en el eje horizontal los valores del perímetro. ¿Qué pueden decir de la gráfica? ¿Qué tipo de relación representa la gráfica?
e) Realicen las actividades de los incisos a), b), c) y d) considerando polígonos regulares de 5, 6, 7, 8, 9... lados. ¿Qué observan?

Las actividades propuestas en los incisos *d) y e)* llevarán a los alumnos a observar que la relación que se establece es proporcional. Aproveche el momento para recordar las propiedades de este tipo de relación.

Las actividades del inciso *e)* permitirán a los alumnos observar que la expresión $l = P/k$ es siempre una relación proporcional, donde k representa el número de lados del polígono regular.

2 Organice a los alumnos en equipos y proponga las siguientes actividades:

Las expresiones °F = 1.8°C + 32, o bien, °F = (9/5)°C + 32, permiten calcular la temperatura en grados Farenheit si se conoce la temperatura en grados centígrados.
a) De las dos expresiones, elijan la que deseen y propongan al menos 10 valores distintos para los grados centígrados y, a partir de ellos, determinen los valores en grados Farenheit.
En cada caso registren los resultados en una tabla. Tomando en cuenta los datos obtenidos, ¿cómo creen que será la gráfica? ¿Qué tipo de relación representaría? Para verificar sus hipótesis, construyan la gráfica.
b) Escriban la expresión algebraica que permita obtener los grados centígrados en función de los grados Farenheit. Después propongan al menos 10 valores distintos para los grados Farenheit y determinen, a partir de ellos, su equivalencia en grados centígrados. En cada caso registren los resultados en una tabla. Si con los datos obtenidos trazan la gráfica, ¿cómo creen que será? ¿Qué tipo de relación representaría? Para verificar sus hipótesis, construyan la gráfica.

Las actividades que se pide realizar en el inciso *a)* pretenden llevar a los alumnos a que identifiquen que la relación corresponde a una función lineal. Si ningún equipo eligió la expresión que incluya 9/5, usted puede proponer que la usen para verificar que en ambos casos se obtienen los mismos resultados.

Si los alumnos han tabulado y graficado correctamente, observarán que los puntos son colineales (éste es un buen momento para repasar o explicar en qué consiste la colinealidad de puntos). Aproveche para mencionar que la relación entre x y y en este problema es una relación lineal.

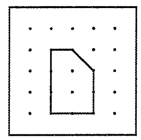
Finalmente promueva el análisis de la tabla y de la gráfica para que sean los alumnos quienes encuentren la expresión que relaciona ambas variables. Es probable que lleguen a alguna de las siguientes ecuaciones:

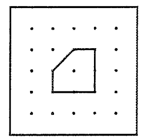
$y = \frac{x}{2}$	El valor de y es la mitad del valor de x.
$x = 2y$	El valor de x es el doble del valor de y.

Es posible que algunos alumnos lleguen a expresiones que son válidas sólo para *alguna* pareja. En este caso propicie que los alumnos se den cuenta de que la expresión debe ser válida para *todas* las parejas.

2 En esta actividad se propone llevar a cabo un análisis semejante al de la actividad 1 pero cambiando una de las condiciones del problema. Plantéelo así:

> *El polígono debe tener en su interior dos clavos. Hagan lo mismo que se propone para la actividad 1, segunda parte (la tabla y gráfica correspondientes, etcétera), agregando la siguiente pregunta:*
> - *¿Es lineal la relación? ¿Por qué?*


Aceptable


No aceptable

La tabla correspondiente será ahora:

x	y
3	$2\frac{1}{2}$
4	3
5	$3\frac{1}{2}$
6	4
7	$4\frac{1}{2}$
8	5
9	$5\frac{1}{2}$
10	6
11	$6\frac{1}{2}$
12	7

Polígonos con dos clavos en su interior.

Analizando la tabla, y comparándola con la anterior, se espera que los alumnos noten que para cada valor de x el valor de y es uno más que en la tabla anterior, por lo que las expresiones correctas a las que pueden llegar los alumnos son:

$y = \frac{1}{2}x + 1$
$y = \frac{x}{2} + 1$
$y = \frac{x+2}{2}$

Al localizar los puntos notarán que son colineales, por lo que podrá concluirse que la relación entre x y y es lineal.

VARIANTE

Si se quiere profundizar más en este problema, puede analizar con el grupo qué sucede si se pide que dentro del polígono queden 3 clavos, 4 clavos... o ningún clavo, y llegar a la generalización buscando la expresión para calcular el área con n clavos dentro. Esta expresión corresponde al teorema de Pick, según el cual el área de un polígono en el geoplano es igual a:

$$\frac{\text{número de clavos que toca la liga}}{2} + \text{número de clavos en el interior} - 1$$

Podrá observar que la fórmula de Pick es una función de dos variables; sin embargo, en cada una de las actividades propuestas en esta ficha, una de las variables se considera constante (el número de clavos en el interior).

Una vez que los alumnos elaboren las gráficas correspondientes, es conveniente que expongan sus trabajos ante el grupo, de manera que observen la equivalencia de las expresiones algebraicas.

Puede resultar de interés que proponga a los alumnos que encuentren semejanzas o diferencias entre las gráficas obtenidas en la actividad 1 y las gráficas que se obtienen en esta actividad.

Al realizar las actividades del inciso *b)* quizá algunos alumnos que hayan elegido la expresión °F = (9/5)°C + 32 obtengan una expresión incorrecta cuando la despejen; por ejemplo: $°C = \frac{(5°F - 32)}{9}$

En estos casos conviene comparar las expresiones incorrectas, y sus resultados, con diferentes expresiones para que los alumnos descubran los errores.

Una vez que los alumnos hayan despejado adecuadamente, podrán proponer valores en grados Farenheit y obtener su equivalencia en grados centígrados, por lo que sin dificultades elaborarán la tabla y la gráfica correspondientes.

Es conveniente que los alumnos esbocen la gráfica que piensan obtener antes de marcar los puntos. Esto le permitirá a usted observar la comprensión que tienen de la relación entre la expresión algebraica, la tabla de datos que genera y su gráfica.

3 Organice a los alumnos en parejas y proponga el siguiente problema.

a) Consideren que conocen el área de un triángulo y la base del mismo. Escriban la expresión algebraica que les permita conocer la altura del triángulo.
b) Para un triángulo de 20 cm^2 de área, propongan al menos 15 valores distintos para la base y calculen la altura. En cada caso registren los resultados en una tabla.
c) Si con los datos obtenidos construyen una gráfica, ¿cómo creen que será? ¿Qué tipo de relación representaría? Para verificar sus hipótesis, constrúyanla.

Cuando la mayoría de los alumnos termine la actividad *a)*, puede solicitar que algunos expliquen cómo procedieron, de manera que esto ayude a corregir sus errores a aquellos que se equivocaron.

Las actividades y las preguntas propuestas en los incisos *b)* y *c)*, requieren el uso de la calculadora para simplificar los cálculos, así como el trazo adecuado de la gráfica. Si la gráfica se ve como una poligonal, puede solicitar a los alumnos que obtengan más puntos, así observarán que la gráfica es una curva continua.

Para responder a la última pregunta los alumnos tendrán que recordar las propiedades de la proporcionalidad inversa. Si hay dificultades puede plantear actividades como las siguientes:

- Elaboren una nueva tabla y coloquen en ella, de menor a mayor, los valores propuestos para la base del triángulo.
- Analicen los datos. ¿Cómo varían?
- Comparen los productos que se obtienen al multiplicar el valor de la base por la altura. ¿Qué observan?
- Lo anterior ayudará a los alumnos a establecer que se trata de una variación inversamente proporcional.

Si lo considera conveniente, puede proponer que realicen las actividades planteadas en los incisos *b)* y *c)* utilizando las expresiones que permiten calcular el área de un rombo, un rectángulo y un trapecio (en este caso se requiere fijar la base menor o la base mayor).

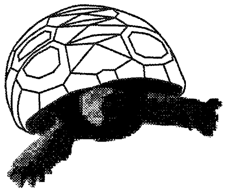
VARIANTES

La expresión °K = °C + 273 permite conocer la temperatura en grados Kelvin a partir de valores en grados centígrados.

1. ¿Cómo será la gráfica de la expresión °K = °C + 273 (propongan al menos 10 valores para los grados centígrados y calculen los valores en grados Kelvin)? ¿Qué tipo de relación representa la gráfica?
2. Escriban la expresión algebraica que permite conocer los grados centígrados en función de los grados Kelvin.
3. ¿Cómo será la gráfica de la expresión que permita conocer los grados centígrados en función de los grados Kelvin? ¿Qué tipo de relación representa la gráfica?

Los costos cambian

Tema 3: Regiones en el plano cartesiano y gráficas de funciones



Propósitos Utilizar constantemente los diversos medios de expresión matemática (lenguaje algebraico, tablas y gráficas) en el planteamiento y solución de problemas diversos y, en casos sencillos, desarrollar criterios para pasar de unos a otros.

Contenidos Ejercicios de graficación de funciones y su aplicación en la solución de problemas. Estudios de familias de la forma $y = mx + b$.

1 Organice a los alumnos en equipos de cuatro y propóngales la siguiente actividad:

El costo de impresión de un periódico escolar depende del número de ejemplares.

n	10	20	30	40	50
C	50	80	110	140	170

De acuerdo con la siguiente tabla, donde n es el número de ejemplares y C el costo en pesos:

a) ¿Cuándo cuesta menos producir un periódico: cuando se imprimen 10 o cuando se imprimen 20? ¿Por qué?
b) Calculen el costo de impresión para 80, 100, 500, 1 000 y n ejemplares.
c) Representen algebraica y gráficamente la función que relaciona n con C.
d) ¿Qué interpretación tiene en este problema la pendiente de la recta?
e) ¿Qué interpretación tiene en este problema la ordenada al origen?

Se dará tiempo suficiente para que los equipos lleven a cabo las actividades sugeridas y contesten las preguntas planteadas. Mientras tanto supervise el trabajo aclarando las dudas que surjan.

Como podrá notar, las respuestas al inciso *b)* presuponen que el alumno debe encontrar el patrón que genera la tabla. En este caso, observará que por cada 10 ejemplares el aumento es de \$30, por tanto, calcular el costo para 80 y 100 ejemplares puede hacerse continuando la tabla:

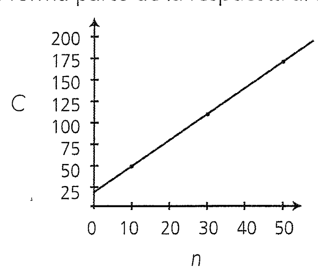
60	70	80	90	100
200	230	260	290	320

Sin embargo, para 500 y 1 000 ejemplares los alumnos tendrán que buscar otra estrategia que no sea la de tabular, ya que resultaría poco práctica. Se espera que, en equipo, los alumnos descubran que si por cada 10 ejemplares el aumento es de \$30, esto significa que el costo de cada ejemplar es de \$3. Ahora bien, ¿por qué se marcan \$50 para los primeros 10 ejemplares? Porque hay un costo inicial extra (gastos de producción del original del cual se derivan las copias) de \$20. Lo que responde al inciso *a)* de la actividad.

Por lo tanto, para 500 ejemplares: \$3 x 500 = \$1 500
Más \$20 de gasto inicial: \$1 500 + \$20 = \$1 520
Y para 1 000 ejemplares: \$3 x 1 000 = \$3 000
Más \$20 de gasto inicial: \$3 000 + \$20 = \$3 020
Para n: \$3 por n ejemplares = $3n$
Más \$20 de gasto inicial: $3n$ + \$20

De hecho, el cálculo para n ejemplares ya forma parte de la respuesta al inciso *c):* $C = 3n + 20$.

Cuya gráfica es:



Para los incisos *d)* y *e)* es probable que usted tenga que intervenir recordando o dando a conocer lo que es la pendiente y la ordenada al origen y cómo, a partir de la ecuación algebraica, pueden identificarse. En este problema los alumnos notarán, por un lado, que la pendiente es el costo de cada ejemplar y, por otro, que la ordenada al origen representa el gasto inicial de producción. Es importante aclarar que todo el análisis anterior no debe ser explicado por usted (excepto para introducir nuevos términos como pendiente y ordenada al origen), sino que debe ser construido por los alumnos con auxilio de su asesoría.

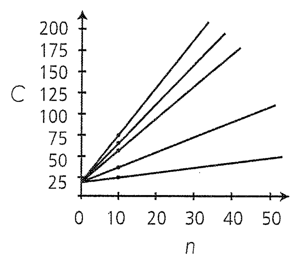
2 Organizados nuevamente en equipos de cuatro o cinco alumnos, y recordando lo que en la gráfica de la función $C = 3n + 20$ representa la pendiente (3) y la ordenada al origen (20), plantee las siguientes actividades:

a) Encuentren la expresión algebraica y grafiquen, en un mismo plano cartesiano, las funciones que representa la siguiente situación: Si se mantienen \$20 como costo inicial de producción, pero ahora varía el costo por ejemplar: \$1, \$2, \$4, \$5 y \$6, ¿qué tienen en común y en qué son diferentes las gráficas construidas?

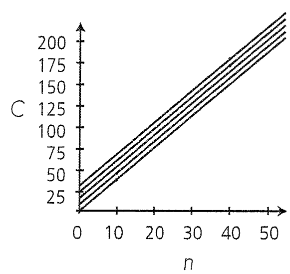
b) Encuentren la expresión algebraica y grafiquen, en un mismo plano cartesiano, las funciones que representa la siguiente situación: Si se mantiene fijo el costo de \$3 por ejemplar, pero varía el costo inicial: \$5, \$10, \$15, \$25 y \$30, ¿en qué se parecen y en qué son diferentes las gráficas construidas?

Los alumnos, al graficar (dependiendo de las escalas que hayan elegido), encontrarán gráficas como las siguientes:

Para el problema *a)*, las rectas obtenidas son concurrentes. Tienen en común la ordenada al origen (20) y varía su pendiente (inclinación):



Para el problema *b)*, las rectas obtenidas tienen todas la misma pendiente (3); es decir, son paralelas y varía su ordenada al origen:



Aproveche la ocasión para mencionar a sus alumnos que, en el primer caso, tiene una familia de rectas que pasan por un mismo punto y, en el segundo caso, se trata de una familia de rectas que tienen la misma pendiente. Una recta está determinada por dos valores (en este caso se habla de la pendiente y la ordenada al origen), cuando uno de esos valores varía mientras el otro se mantiene constante se dice que se tiene una familia de rectas.

VARIANTE

Muchas situaciones cotidianas pueden ser aprovechadas para estudiar, con este mismo tratamiento, funciones de la forma $y = mx + b$. Por ejemplo:

a) Costo por el uso del teléfono:

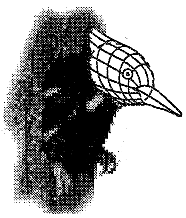
Costo = Precio de cada llamada x Número de llamadas + Renta fija.

b) Costo del servicio de taxi en la ciudad de México:

Costo = Precio por kilómetro x Kilómetros recorridos + Banderazo.
Costo = Precio por minuto x Número de minutos + Banderazo.

La velocidad y las matemáticas

Tema 4: Ecuaciones y problemas (continuación)

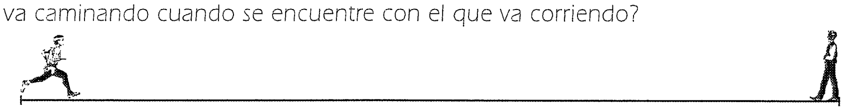


Propósitos Practicar los procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones 2 x 2 y ecuaciones cuadráticas. Aplicar los productos notables para factorizar polinomios de segundo grado.

Contenidos Planteamiento de problemas que conducen a un sistema 2 x 2 de ecuaciones lineales simultáneas: su solución por el método de sustitución.

1 Organice a los alumnos en equipos de cuatro y plantee el siguiente problema:

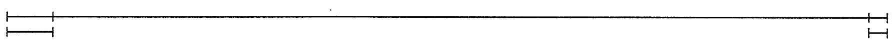
> *Dos muchachos se dirigen uno hacia el otro separados por una distancia de 50 m: uno corriendo y otro caminando. El que va corriendo lo hace a una velocidad constante de 2.5 m/s y el que va caminando lleva una velocidad de 1 m/s. ¿Cuántos metros habrá recorrido el compañero que va caminando cuando se encuentre con el que va corriendo?*



Se sugiere que, antes de resolver el problema, hagan una estimación del resultado esperado. A continuación deje que los alumnos busquen un procedimiento para resolverlo.

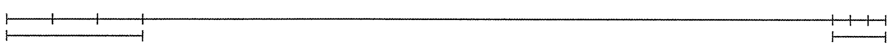
Es probable que algunos alumnos intenten hacer un diagrama en el que se aprecie lo que cada persona avanza en cada segundo. Por ejemplo:

En el primer segundo:

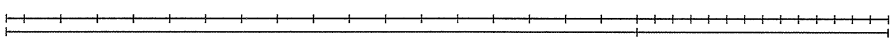


En el segundo número 2:

En el segundo número 3:



Y así sucesivamente hasta obtener un diagrama como el siguiente:



Con ello se darán cuenta de que el muchacho que va caminando habrá recorrido poco más de 14 metros.

Otros equipos posiblemente elaboren una tabla para registrar lo que cada uno avanza en cada segundo y busquen aquel segundo en el que los recorridos de ambos sumen o se aproximen a 50 metros.

Tiempo (s)	Alumno que va corriendo	Alumno que va caminando	Distancia que han recorrido los dos
1	2.5	1	3.5
2	5	2	7
3	7.5	3	10.5
4	10	4	14
5	12.5	5	17.5
6	15	6	21
7	17.5	7	24.5
8	20	8	28
9	22.5	9	31.5
10	25	10	35
11	27.5	11	38.5
12	30	12	42
13	32.5	13	45.5
14	35	14	49
15	37.5	15	52.5

Con esta tabla podrán observar que cuando el que va caminando lleva 14 metros, el que va corriendo ha recorrido 35 metros, lo que representa 49 metros; es decir, los muchachos están a un metro de distancia y, por tanto, se encontrarán poco después. Como puede apreciarse, este método no permite encontrar la solución exacta, sólo una buena aproximación.

Un procedimiento menos laborioso es el que surge al plantearse la siguiente pregunta. En un segundo ambos compañeros avanzan 2.5 m + 1 m = 3.5 m, por tanto, ¿en cuánto tiempo cubrirán los 50 metros? De donde surge la operación:

$$50 \text{ m} \div \frac{3.5 \text{ m}}{\text{s}} = 14\frac{2}{7} \text{ s}$$

En 14 2/7 segundos uno de los compañeros avanza 14 2/7 metros, mientras el otro compañero avanza 35 5/7 metros.

Este mismo procedimiento puede realizarse apoyándose en la fórmula para calcular la velocidad constante: $v = d/t$. Como se conoce la velocidad (3.5 m/s de ambos compañeros) y la distancia que deben cubrir (50 m), hay que despejar el tiempo:

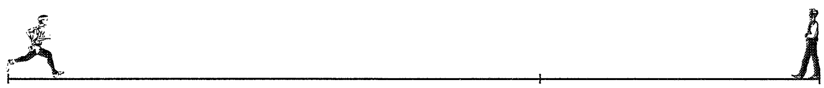
$$t = \frac{d}{v} = \frac{50 \text{ m}}{3.5 \text{ m/s}} = 14\frac{2}{7} \text{ s}$$

Otra forma de encontrar el resultado es haciendo el siguiente planteamiento que hace uso de la fórmula: $v = \frac{d}{t}$

Tenemos que: $v_{\text{corriendo}} = \frac{2.5 \text{ m}}{\text{s}}$

$v_{\text{caminando}} = \frac{1 \text{ m}}{\text{s}}$

Si llamamos x a la distancia que ha recorrido el que va caminando y y a la distancia que ha recorrido el que va corriendo:



Sustituyendo, en la fórmula $v = d/t$, las velocidades y las variables x y y, tenemos: $2.5 = \frac{y}{t}$

$1 = \frac{x}{t}$

Despejando t en ambas: $t = \frac{y}{2.5}$

$t = \frac{x}{1}$

Y como el instante (t) en que se encuentran es el mismo, entonces podemos igualar: $\frac{y}{2.5} = \frac{x}{1}$, es decir, $y = 2.5\,x$

Con lo que obtenemos una relación entre x y y. La otra ecuación es la que marca la suma de las distancias que recorrieron ambos: $x + y = 50$. Resolviendo el sistema tenemos:

$$x = 14\frac{2}{7} \text{ m}$$

Que es la distancia que ha recorrido el que va caminando en el momento de encontrarse con el otro compañero, quien habrá recorrido 35 5/7 metros.

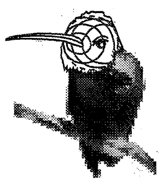
VARIANTES

Existen muchos problemas relacionados con la velocidad que dan lugar a sistemas de ecuaciones. Pueden trabajarse en equipo o con todo el grupo.

1. Dos personas se dirigen de un pueblo a otro, entre los cuales hay una distancia de 40 km. Una de ellas va 2 km por hora más rápido que la otra y llega una hora antes. Calculen la velocidad y el tiempo que cada una de las personas invierte en su recorrido.
2. Durante un sismo las ondas primaria y secundaria viajan a una velocidad de 8 km/s y 4.8 km/s, respectivamente. Si a una estación sísmica la onda primaria llegó 15 segundos antes que la secundaria, ¿a qué distancia se encontraba el epicentro del temblor?

Triángulos con palillos

Tema 5: Triángulos y cuadriláteros



Propósito Practicar el razonamiento deductivo en situaciones extraídas de la geometría y de otras partes de las matemáticas.

Contenidos Aplicaciones del estudio de las propiedades de los triángulos.

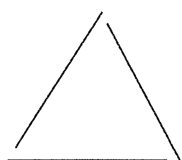
Material Una caja de palillos, un pliego de papel bond y tres dados (por equipo).

1 Organice al grupo en equipos de cuatro personas y proponga la siguiente actividad:

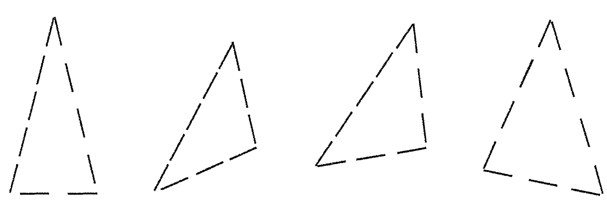
¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir con un mismo número entero de palillos? Para saberlo, van a construir triángulos y a llenar la siguiente tabla. Los palillos serán usados en el perímetro todos a la vez.

Número de palillos	Número de triángulos diferentes que pueden formarse	Medidas de los lados (unidad: palillo)
1	0	
2	0	
3	1	1-1-1
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11	4	5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3
12		
13		
14		
15		

Los alumnos empezarán a explorar la forma de construir triángulos usando palillos. Notarán que con uno o dos palillos, por ejemplo, es imposible formar un triángulo, y que con tres palillos se puede formar sólo un triángulo:



Mientras que con 11 palillos pueden formarse cuatro triángulos diferentes.



Después de un tiempo suficiente, los representantes de algunos equipos pasarán al frente a mostrar sus resultados (pueden hacer sus tablas en pliegos de papel bond y pegarlas en el pizarrón). Una vez que se tengan varias tablas, deben compararlas, y en aquellos renglones donde haya resultados diferentes los equipos implicados validarán su solución ante el grupo.

Es probable que no todos los equipos encuentren todos los triángulos que pueden formarse con cierto número de palillos, pero de manera grupal pueden formar y completar llegando a formar una tabla como la siguiente:

Número de palillos	Número de triángulos diferentes que pueden formarse	Medidas de los lados (unidad: palillo)
1	0	
2	0	
3	1	1-1-1
4	0	
5	1	2-2-1
6	1	2-2-2
7	2	3-3-1, 3-2-2
8	1	3-3-2
9	3	4-4-1, 4-3-2, 3-3-3
10	2	4-4-2, 4-3-3
11	4	5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3
12	3	5-5-2, 4-4-4, 5-4-3
13	5	6-6-1, 6-4-3, 6-5-2, 5-5-3,5-4-4
14	4	6-6-2, 6-5-3, 6-4-4, 5-5-4
15	7	7-7-1, 7-6-2, 7-5-3, 7-4-4, 6-6-3, 6-5-4, 5-5-5

Además de la exploración de los diferentes triángulos, lo importante de la actividad es que los alumnos analicen cuándo es posible formar triángulos y cuándo no. Haciendo preguntas como: ¿por qué con 15 palillos no pudieron formar un triángulo cuyos lados midieran 8, 4 y 3?, se pretende que los alumnos lleguen a enunciar (con sus propias palabras) que *la suma de las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo debe ser mayor que la medida del tercer lado*, o bien que *la suma de las medidas de los dos lados menores debe superar la medida del lado mayor*.

2 Con objeto de practicar los trazos con regla y compás pida a los alumnos que, de manera individual, realicen la siguiente actividad:

a) Escojan cinco triángulos de los que formaron para llenar la tabla 1 y trácenlos utilizando regla y compás (cambien la unidad de medida: si un lado mide 5 palillos, trácenlo de 5 centímetros).
b) Traten de trazar cinco de los triángulos que no se pudieron hacer en la actividad 1; demuestren que no existen triángulos con esas medidas (con 10 palillos por ejemplo, no existe un triángulo cuyos lados midan 6-3-1).

3 Para reafirmar la conclusión a la que se llegó en la actividad 1, se sugiere llevar a cabo el siguiente juego en equipos de cuatro o cinco alumnos.

a) Por turno cada alumno lanza los tres dados.
b) Si con los números de los dados es posible formar un triángulo, el jugador debe sumarlos y anotar ese puntaje a su favor. Si no es posible formar un triángulo, el puntaje para esa tirada es cero.
c) Gana quien haga más puntos en 10 tiradas.

Cuando haya discrepancia entre si es o no posible formar un triángulo con los números que indican los dados, invite a los alumnos a que traten de construirlo utilizando regla y compás o, en su defecto, con los palillos.

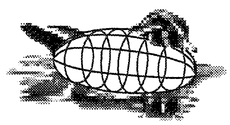
VARIANTE

Puede sugerir la siguiente actividad:

Clasifiquen los triángulos obtenidos en la actividad 1: por la medida de sus lados y por el número de ejes de simetría.

Raíz cuadrada

Tema 6: Raíz cuadrada y métodos de aproximación



Propósito Conocer la idea de aproximación a través del cálculo de la raíz cuadrada.
Contenidos Cálculo de la raíz cuadrada por diversos métodos.
Material Calculadora.

1 Organice a los alumnos en parejas. Explique que para llevar a cabo esta actividad van a emplear la calculadora pero sin utilizar la función *raíz cuadrada*. Plantee el siguiente problema:

> Las cantidades que aparecen en cada uno de los siguientes cuadrados representan su área. Calculen la medida de un lado de cada cuadrado.

$361\ m^2$ $\quad$ $13\ m^2$

Esta actividad presupone que los alumnos no utilizarán algoritmos para calcular la raíz cuadrada. El propósito es que traten de estimar la medida del lado de cada cuadrado y, con ayuda de la calculadora, prueben si la estimación es correcta o no.

Es relativamente sencillo determinar el lado del primer cuadrado, no así el segundo, cuya medida sólo puede aproximarse. Ésta es quizás la dificultad que enfrentarán los alumnos, ya que tendrán que aplicar sus conocimientos relacionados con los decimales para aproximarse al valor de la raíz.

Algunos alumnos encontrarán que la raíz de 13 se encuentra entre:

3 y 4, ya que: $3^2 < 13 < 4^2$; y que

$3.5 < \sqrt{13} < 3.8$ porque $(3.5)^2 < 13 < (3.8)^2$,

$3.6 < \sqrt{13} < 3.7$ porque $(3.6)^2 < 13 < (3.7)^2$, y así sucesivamente.

Otros alumnos serán menos sistemáticos para proponer el valor de un lado del cuadrado, en cuyo caso es necesario que usted formule preguntas que los acerquen cada vez más al valor de la raíz y a darse cuenta de que ningún número decimal será el valor exacto.

2 Organizados en parejas, comente a los alumnos que van a calcular la raíz cuadrada con otro procedimiento que consiste en proponer rectángulos que tengan como área el número cuya raíz cuadrada se quiere calcular, y que estos rectángulos se deben ir transformando hasta que resulte un cuadrado o lo más cercano a un cuadrado. Formule el siguiente problema:

> Calculen la medida de un lado del cuadrado siguiente proponiendo rectángulos que tengan igual área.

$19\ m^2$

Es recomendable que los alumnos pongan a consideración del grupo las estrategias que utilizaron para obtener la base y la altura de los rectángulos. Algunos equipos se darán cuenta de que basta con proponer la base o la altura y despejar cualquiera de ellas empleando la fórmula: $A = b \times h$.

Para calcular la medida del lado del cuadrado, los alumnos pueden enfrentar algunas dificultades que tienen que ver con la siguiente pregunta:

¿Cómo verificar que los rectángulos propuestos son cada vez *más cuadrados*?

Puede ayudar a los alumnos a clarificar la idea anterior preguntando, por ejemplo: ¿Cómo son las diferencias entre la base y la altura de los rectángulos propuestos? ¿Cuándo se parece más un rectángulo a un cuadrado?

Lo importante es que los alumnos observen que cuando la diferencia es *pequeña*, entonces el rectángulo se parece más a un cuadrado. Una tabla como la que se muestra a continuación puede ayudar a comprender mejor lo dicho anteriormente.

Medida de la altura (h)	Medida de la base $b = \frac{A}{h}$ en cm	Diferencia entre la base y la altura $(b - h)$
4	4.8	0.8
3.9	4.87179	0.97
4.5	4.22222	0.2777
4.3	4.41860	0.11860
4.35	4.36781	0.01781

A partir de esta información los alumnos podrán observar que la raíz que se quiere calcular está entre 4.35 y 4.36781.

Es posible que algunos alumnos utilicen la función *raíz cuadrada* de la calculadora (aunque la indicación haya sido la contraria). Esta situación puede servir para sugerirles que utilicen la información de la calculadora para ir verificando que las medidas del largo y ancho de los rectángulos propuestos se van aproximando al valor de la raíz que se busca.

3 Indique a los alumnos que van a seguir trabajando en parejas. Señale que van a obtener la raíz cuadrada de un número mediante un procedimiento propuesto por los babilonios.

Observen la siguiente secuencia de rectángulos:

1) $A = 19\ u^2$ $\quad h_1 = 1$ $\quad b_1 = 19$

2) $A = 19\ u^2$ $\quad h_2$ $\quad b_2$

$$b_2 = \frac{b_1 + h_1}{2} \qquad h_2 = \frac{A}{b_2}$$

3) $A = 19\ u^2$ $\quad h_3$ $\quad b_3$

$$b_3 = \frac{b_2 + h_2}{2} \qquad h_3 = \frac{A}{b_3}$$

En cada rectángulo se muestra cómo obtener aproximaciones de la raíz cuadrada de 19. Escriban una expresión algebraica para calcular cada una de las siguientes aproximaciones de la raíz cuadrada de 19.

Para que los alumnos observen que la secuencia permite obtener una aproximación de la raíz de 19, puede pedirles que efectúen los cálculos.

19 $\quad h_2 \quad b_2$

$$b_2 = \frac{(b_1 + h_1)}{2} = \frac{(19 + 1)}{2} = 10 \qquad h_2 = \frac{A}{b_2} = \frac{19}{10} = 1.9$$

$h_3 \quad b_3$

$$b_3 = \frac{(b_2 + h_2)}{2} = \frac{(10 + 1.9)}{2} = \frac{11.9}{2} = 5.95 \qquad h_3 = \frac{A}{b_3} = \frac{19}{5.95} = 3.193$$

A partir de este hecho los alumnos tendrán una cierta seguridad de que el procedimiento funciona y podrán obtener otras aproximaciones.

Dada la secuencia mostrada anteriormente, en un primer momento algunos alumnos pueden expresar oralmente el procedimiento; otros estudiantes pueden anotar expresiones como las siguientes:

$$b_4 = \frac{(b_3 + h_3)}{2} \qquad b_5 = \frac{(b_4 + h_4)}{2}$$

$$h_4 = \frac{A}{b_4} \qquad h_5 = \frac{A}{b_5}$$

Y así sucesivamente.

En cada paso puede invitar a los alumnos a que sustituyan los valores anteriores y efectúen los cálculos para comprobar si la expresión propuesta funciona o no.

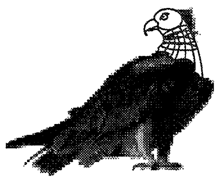
VARIANTE

Puede sugerir la siguiente actividad:

Calculen la raíz cuadrada de 6 241 y de 71 utilizando dos procedimientos distintos.

¿Qué te conviene?

Tema 7: Presentación y tratamiento de la información



Propósitos Conocer ejemplos de crecimiento exponencial o geométrico. Comparar este modo de crecimiento con el aritmético o lineal.

Contenidos Crecimiento exponencial o geométrico en comparación con el crecimiento aritmético o lineal. Ejemplos ilustrativos.

Material Calculadora.

1 Después de organizar al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos, plantee el siguiente problema:

> *Imaginen que han ganado un premio y tienen que elegir entre dos opciones: Recibir 1 000 pesos diarios durante 20 días, o bien, recibir 1 peso el primer día, 2 el segundo, 4 el tercero, 8 el cuarto y así sucesivamente hasta el día número 20. ¿Qué conviene más? Justifiquen su respuesta.*

Deje que los alumnos discutan en su equipo cuál es la mejor opción. Es muy común que piensen que la propuesta de $1 000 diarios conviene más, sin embargo, debe pedirles que traten de comprobar su resultado.

Cuando la mayoría de los equipos tenga una respuesta justificada, pida que algunos alumnos expliquen su procedimiento ante el grupo. Después, para visualizar la situación proponga que llenen una tabla como la siguiente:

	Opción 1		Opción 2	
Día	Reciben	Acumulan	Reciben	Acumulan
1	1 000	1 000	1	1
2	1 000	2 000	2	3
3	1 000	3 000	4	7
4	1 000	4 000	8	15
5	1 000	5 000	16	31
6	1 000	6 000	32	63
7	1 000	7 000	64	127
8	1 000	8 000	128	255
9	1 000	9 000	256	511
10	1 000	10 000	512	1 023
11	1 000	11 000	1 024	2 047
12	1 000	12 000	2 048	4 095
13	1 000	13 000	4 096	8 191
14	1 000	14 000	8 192	16 383
15	1 000	15 000	16 384	32 767
16	1 000	16 000	32 768	65 535
17	1 000	17 000	65 536	131 071
18	1 000	18 000	131 072	262 143
19	1 000	19 000	262 144	524 287
20	1 000	20 000	524 288	1 048 575

Para el caso de la segunda opción es posible que algunos alumnos noten que la suma acumulada por día es, precisamente, una unidad menos que la cantidad que se recibirá al día siguiente. Por ejemplo, para el día 12, la suma acumulada es $4 095, y la cantidad a recibir el siguiente día (13) es $4 096, lo cual facilitará el llenado de la tabla, ya que calculando la columna de la cantidad recibida pueden llenar la columna de la cantidad acumulada.

Con su ayuda los alumnos podrán deducir una fórmula que permite calcular la cantidad acumulada para cada día. Notarán que lo que se recibe el primer día es 2^0, el segundo es 2^1, el tercero es 2^2, el cuarto es 2^3, y así sucesivamente. Esto se puede expresar en una tabla como la siguiente:

Día	Recibe	Acumula	
1	$2^0 = 1$	1	$2^1 - 1$
2	$2^1 = 2$	3	$2^2 - 1$
3	$2^2 = 4$	7	$2^3 - 1$
4	$2^3 = 8$	15	$2^4 - 1$
5	$2^4 = 16$	31	$2^5 - 1$
n	2^{n-1}		$2^n - 1$

Así, para 20 días tenemos que se recibe: $2^{20-1} = 2^{19} = 524\ 288$,

y acumula: $2^{20} - 1 = 1\ 048\ 575$

Esta operación puede efectuarse fácilmente en una calculadora científica (aproveche la oportunidad para repasar el uso de exponentes en la calculadora). Por otro lado, puede comentar con los alumnos que algunas calculadoras no científicas permiten elevar a cualquier potencia tecleando.

$\boxed{n}\ \boxed{x}\ \boxed{n}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ Donde *n* es el número que se quiere elevar a una potencia. El signo *igual* se teclea las veces que sea necesario.

Al comentar en grupo el ejercicio insista en que los alumnos deben observar el crecimiento de las cantidades en cada una de las propuestas. Haga el comentario de que en la primera opción el crecimiento es lineal o aritmético, y en la segunda exponencial o geométrico.

2 Continuando el trabajo en equipos, plantee la siguiente situación:

La siguiente tabla muestra la población aproximada (expresada en millones) de una colonia de bacterias. El registro se ha hecho cada hora.

hora	0	1	2	3	4	5
bacterias	6	12	24	48	96	192

De acuerdo con esta información:

a) ¿Cuántas bacterias habrá después de 8 horas? ¿Y después de 10?

b) ¿Cuántas bacterias habría una hora antes de la primera observación?

c) Encuentren la función que les permita calcular el número de bacterias para cada hora.

Teniendo como antecedente la actividad 1, los alumnos notarán que se trata de una función que crece exponencialmente. La solución a la pregunta *a)* la encontrarán fácilmente al descubrir el patrón y continuar la tabla:

6	7	8	9	10
384	768	1 536	3 072	6 144

Lo mismo para la pregunta *b)*:

hora	1 hora antes	0
bacterias	3	6

Finalmente, para encontrar la respuesta al punto *c)*, requieren analizar cómo varía el número de bacterias. Debe ser paciente y permitir que sean los alumnos quienes, en equipo o en grupo, lleguen a la expresión de la función que se ha pedido. Podría ser que, vinculándola con la actividad anterior, intuyan que se trata de un número que se eleva a un cierto exponente. Es probable que piensen que es 6, pero fácilmente descubrirán que no es así (el crecimiento sería 6, 36, 216...).

Probablemente, al ver que son múltiplos de 6, noten que:

6 = 6; 12 = 6 x 2; 24 = 6 x 4; 48 = 6 x 8; 96 = 6 x 16; etcétera. Y que reconozcan a los factores 2, 4, 8, 16... como potencias de 2. De esta manera, encontrarán que la función pedida es:

$$y = 6 \times 2^n$$

Donde *y* es el número de bacterias y *n* la hora (los alumnos podrían usar otras letras).

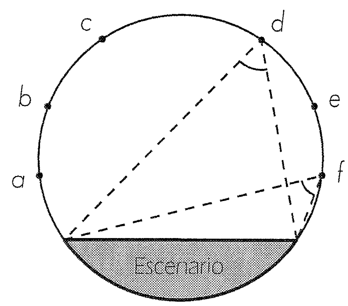
VARIANTES

1. Se sugiere que los alumnos grafiquen en un mismo plano las funciones $y = 2^x$, $y = x^2$, $y = 2x$, para que noten sus diferencias.
2. El interés compuesto es otro ejemplo de función exponencial que pueden trabajar.

El círculo

Propósito	Practicar el razonamiento deductivo en situaciones extraídas de la geometría.
Contenidos	Ángulo inscrito en una circunferencia. Ejemplos para ilustrar el lugar geométrico.
Material	Juego de geometría.

1 Organice a los alumnos en parejas, entrégueles un dibujo como el que aparece enseguida y comente lo siguiente:

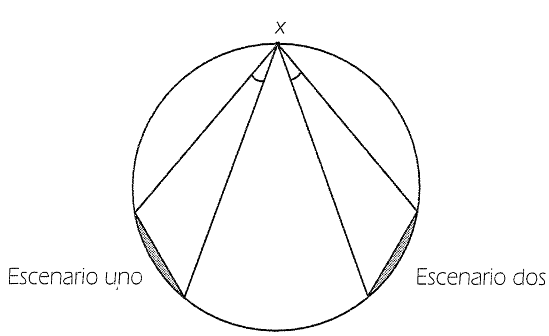
> *El dibujo que observan es el croquis de un teatro. Las letras señalan algunos de los asientos y las líneas punteadas el ángulo de visión de los espectadores que ocupan esos asientos.*
>
> 
>
>
> *¿Cuál de los espectadores (a, b, c, d, e, f) tiene mayor ángulo de visión?*

Seguramente los alumnos trazarán los ángulos de visión de los espectadores y algunos medirán con el transportador cada uno de ellos. Otros alumnos utilizarán como auxiliar una hoja y copiarán en ella uno de los ángulos para superponerlo y compararlo con los otros. En cualquier caso concluirán que los ángulos de visión de cada uno de los espectadores son congruentes.

Una situación que usted puede plantear es la siguiente: ¿Qué sucede si el escenario (círculo) es más grande o más pequeño? A partir de los resultados que los alumnos encuentren, puede utilizar el lenguaje propio de la geometría para concluir que si los ángulos inscritos en el mismo círculo (aquellos que tienen su vértice en la circunferencia y sus dos lados son cuerdas) abarcan el mismo arco de circunferencia, entonces miden lo mismo.

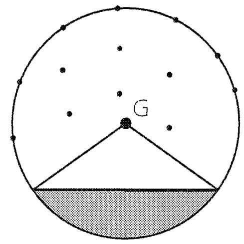
Una variante que puede proponer es la siguiente:

¿Cómo serán los ángulos de visión si un espectador *x* observa dos escenarios en los que la medida de los arcos que abarcan son iguales?, como se ve en el dibujo siguiente:



2 Nuevamente organizados en parejas, proponga a los alumnos resolver la siguiente situación:

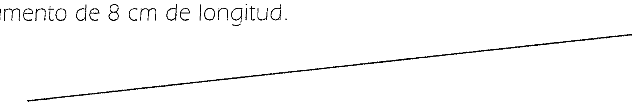
> *Una persona se encuentra situada en el centro del teatro (que tiene la misma forma que el de la actividad 1). Localicen algún lugar del teatro en el que otro espectador tenga la mitad del ángulo de visión que la que se encuentra en el centro.*



Seguramente los alumnos escogerán puntos al azar y medirán cada ángulo para ver si cumple con la condición que se ha solicitado. Observarán que si los puntos elegidos se encuentran cerca de la circunferencia, la medida del ángulo se va acercando a la mitad de la medida del ángulo central, y que si el punto elegido se encuentra sobre cualquier parte de la circunferencia, entonces la medida del ángulo cumple con la condición señalada.

3 Organizados en parejas, indique a sus alumnos que van a utilizar sus escuadras y propóngales la siguiente situación:

> *Tracen un segmento de 8 cm de longitud.*

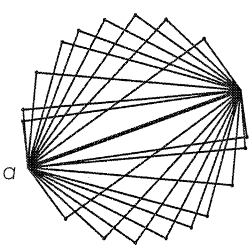


> *Después tracen al menos 8 rectángulos diferentes en los cuales una de sus diagonales sea el segmento que trazaron.*
> *a) ¿Qué figura geométrica forman los vértices de todos los rectángulos que trazaron?*
> *b) ¿Por qué se forma la figura geométrica que encontraron?*

Es conveniente que observe el trabajo de los alumnos y, si es necesario, exponga las explicaciones pertinentes para que comprendan el problema y utilicen adecuadamente los instrumentos geométricos. Cuando la mayoría de los alumnos haya terminado, puede solicitar que algunos pasen al pizarrón para que indiquen:

- Cómo trazaron los rectángulos.
- Qué figura geométrica se forma con los vértices de los rectángulos.
- Qué relación tiene el segmento original con la circunferencia que se forma.
- ¿Cuánto mide un ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y abarca su diámetro?

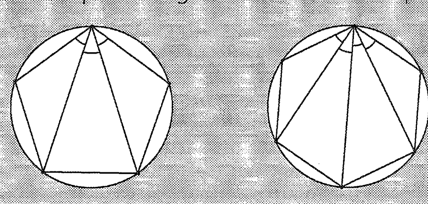
Los trazos de los alumnos serán similares a los siguientes:



VARIANTES

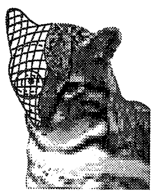
Puede proponer actividades como las siguientes:

1. Tracen un segmento que mida 8 cm. Llamen *A* a uno de los extremos y *B* al otro. Tracen 10 rectas que pasen por el punto *A*. Tracen líneas perpendiculares a cada una de las 10 rectas, las cuales deben pasar por el punto *B*.
   - Si unen los vértices de los ángulos rectos que trazaron, ¿qué figura geométrica formarán?
2. Escriban los argumentos necesarios para mostrar que los ángulos marcados en los polígonos regulares siguientes son todos congruentes.



La magia de los polinomios

Tema 9: Operaciones con polinomios de una variable



Propósito Utilizar adecuadamente diversos medios de expresión matemática: lenguaje algebraico.

Contenidos Simplificación de términos semejantes. Extracción de un factor común. Evaluación de polinomios.

Material Calculadora (opcional).

1 Organice al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos y después plantee la siguiente actividad:

Observen la tabla que se muestra. Si se factorizan estas expresiones:

a) ¿Cuál es el factor común a todas las expresiones?

$x^2 + 3x$	$x^2 - 4x$	$x^2 + x$
$x^2 - 2x$	x^2	$x^2 + 2x$
$x^2 - x$	$x^2 + 4x$	$x^2 - 3x$

Tabla 1

b) Hagan en su cuaderno una tabla como la anterior, pero en ella anoten la factorización de cada una de las expresiones. Deben escribir cada expresión en el lugar que le corresponde de acuerdo con la tabla anterior.

c) A partir de la tabla que elaboraron, construyan otra en la que ahora anoten la expresión que resulta de eliminar el factor que es común a todas las expresiones.

Se espera que los alumnos construyan, para el inciso *b)*, la siguiente tabla:

$x(x + 3)$	$x(x - 4)$	$x(x + 1)$
$x(x - 2)$	$x(x)$	$x(x + 2)$
$x(x - 1)$	$x(x + 4)$	$x(x - 3)$

Tabla 2

Tal vez el término x^2, por ser el único monomio, no les parezca que deba ser factorizado: la visión general de la tabla puede ayudar a que se factorice. Una vez que hayan construido la tabla 2, la construcción que se pide en el inciso *c)* resultará algo sencillo.

2 Indique que van a seguir trabajando en equipos. A continuación recuérdeles qué se entiende como un *cuadrado mágico* y plantee la siguiente situación:

La tabla que se muestra es la que obtuvieron a partir del inciso c) de la actividad 1.

$x + 3$	$x - 4$	$x + 1$
$x - 2$	x	$x + 2$
$x - 1$	$x + 4$	$x - 3$

Tabla 3

a) Comprueben que se trata de un cuadrado mágico.

b) La tabla 1, ¿es un cuadrado mágico? Compruébenlo.

c) ¿Qué relación existe entre la expresión que se encuentra en la casilla central y la suma de la tabla?

Las tablas 1 y 3 pueden ser consideradas como *cuadrados mágicos*. La suma de la tabla 1 es $3x^2$, y la de la tabla 3 es $3x$. Se espera que los alumnos descubran que la suma de las tres expresiones que se encuentran dispuestas diagonalmente así como la suma de las expresiones que se encuentran en la misma fila, horizontal o verticalmente, es el triple de la expresión colocada en el centro del *cuadrado mágico*.

3 Aprovechando las propiedades de los *cuadrados mágicos*, plantee la siguiente actividad:

Consideren los cuadrados mágicos siguientes:

$x^2 + 3x$	$x^2 - 4x$	$x^2 + x$
$x^2 - 2x$	x^2	$x^2 + 2x$
$x^2 - x$	$x^2 + 4x$	$x^2 - 3x$

Tabla 4

$x + 3$	$x - 4$	$x + 1$
$x - 2$	x	$x + 2$
$x - 1$	$x + 4$	$x - 3$

Tabla 5

Construyan una tabla como las anteriores. En cada espacio anoten las expresiones que se obtengan de la suma de las casillas respectivas de las tablas 4 y 5; por ejemplo: $(x^2 + 3x) + (x + 3) = x^2 + 4x + 3$, lo cual se anota en:

$x^2 + 4x + 3$		

¿El cuadrado que resulta será mágico?

Deje que los alumnos trabajen y descubran qué es lo que sucede. Se espera que construyan la siguiente tabla:

$x^2 + 4x + 3$	$x^2 - 3x - 4$	$x^2 + 2x + 1$
$x^2 - x - 2$	$x^2 + x$	$x^2 + 3x + 2$
$x^2 - 1$	$x^2 + 5x + 4$	$x^2 - 2x - 3$

Tabla 6

Al realizar las sumas en forma horizontal, vertical y diagonal, el resultado será igual a $3x^2 + 3x$, lo cual quiere decir que la tabla 6 también es un *cuadrado mágico*.

Usted podrá seguir explotando las propiedades de los *cuadrados mágicos* para lograr que sus alumnos operen con una gran variedad de polinomios. Por ejemplo, puede pedirles que multipliquen cada expresión de la tabla 3 por el factor: $(3x + 2)$, con lo que obtendrán el siguiente *cuadrado mágico*.

$3x^2 + 11x + 6$	$3x^2 - 10x - 8$	$3x^2 + 5x + 2$
$3x^2 - 4x - 4$	$3x^2 + 2x$	$3x^2 + 8x + 4$
$3x^2 - x - 2$	$3x^2 + 14x + 8$	$3x^2 - 7x - 6$

Tabla 7

En este cuadrado mágico, el resultado de las sumas es $9x^2 + 6x$.

4 Organice a los alumnos en equipos e indíqueles que realicen la siguiente actividad:

Observen el siguiente cuadrado:

Evalúen cada polinomio del cuadrado según los valores que se indican para x:

$$x = 3,\ x = -2,\ x = \frac{1}{2}.$$

$x + 3$	$x - 4$	$x + 1$
$x - 2$	x	$x + 2$
$x - 1$	$x + 4$	$x - 3$

Tabla 8

a) Comprueben que en cada caso se obtiene un cuadrado mágico.
b) Asignen a x otros valores y comprueben que se obtienen cuadrados mágicos.
c) ¿Qué relación existe entre el número que se encuentra en la casilla central y la suma del cuadrado?

Dé tiempo suficiente para que cada alumno opere con los polinomios y construya sus tres tablas a partir de la tabla 8.

Cuando $x = 3$ se tiene que:

6	−1	4
1	3	5
2	7	0

Cuando $x = -2$ se tiene que:

1	−6	−1
−4	−2	0
−3	2	−5

Cuando $x = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$-\frac{5}{2}$

Posteriormente los alumnos realizarán las sumas necesarias para descubrir si se trata de *cuadrados mágicos* o no.

Si lo cree conveniente, puede tomar cualquiera de los *cuadrados mágicos* que se hayan construido con expresiones algebraicas y lleve a cabo la evaluación de los polinomios asignando valores a x que los mismos alumnos pueden proponer.

VARIANTES

Puede proponer alguna de las siguientes actividades:

1. Escriban las expresiones algebraicas que faltan para obtener un cuadrado que sea mágico.

$x^4 + x^3$		
		$x^4 - x^3$
$x^4 - 3x^3$	$x^4 + 3x^3$	$x^4 - 3x^3$

$x^2 + 4x + \square$	$\square - 3x + \square$	$x^2 + 2x + 1$
$x^2 + \square - 2$	$\square + \square$	$x^2 + 3x + 2$
$\square - 1$	$\square + 5x + 4$	$x^2 + \square - 3$

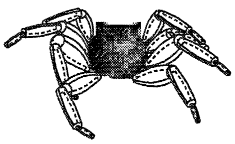
2. Anoten en los cuadros vacíos las expresiones que hacen falta para que el cuadrado sea mágico.

3. Comprueben que el siguiente cuadrado es mágico. Si multiplican cada expresión del cuadrado por $(x - 1)$, ¿se obtendrá un nuevo cuadrado mágico? Efectúen la multiplicación y comprueben su conjetura.

$x - 4$	$x + 10$	$x + 9$	$x - 1$
$x + 7$	$x + 1$	$x + 2$	$x + 4$
$x + 3$	$x + 5$	$x + 6$	x
$x + 8$	$x - 2$	$x - 3$	$x + 11$

Cuadrados algebraicos

Tema 10: Productos notables y factorización



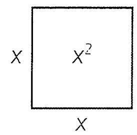
Propósito Aplicar los productos notables en la factorización de polinomios de segundo grado.

Contenidos Productos notables: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$; $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

Material Copias, para cada alumno, de los anexos B (p. 123) y C (p. 124), tijeras, resistol y cartulina.

1 Entregue a los alumnos la fotocopia (si no es posible la fotocopia, puede pedirles que tracen los cuadrados y rectángulos indicándoles las medidas). Pídales que de manera individual:

Calculen el área de cada figura y escriban el resultado en el centro de cada una. Por ejemplo:



Después recorten y peguen cada figura en cartulina.

Hágales saber que el objetivo es preparar el material que utilizarán en la siguiente actividad. Una vez que hayan terminado, invítelos a confrontar los resultados que obtuvieron al calcular el área de cada figura.

2 Organice por parejas a los alumnos y propóngales la siguiente actividad:

Con ayuda de su material formen cuadrados (a manera de rompecabezas) cuyos lados sean los indicados, y calculen el área en cada caso.

a) $x + 1$	*f)* $y + 1$
b) $x + 2$	*g)* $y + 2$
c) $x + 3$	*h)* $y + 4$
d) $x + 4$	*i)* $2x + 1$
e) $x + y$	*j)* $2x + y$

Cabe mencionar que una vez que se haya construido un cuadrado, y calculado su área, éste puede desbaratarse para construir otros.

Mientras los alumnos trabajan recorra el salón y resuelva dudas. Deje que los alumnos registren el área de cada cuadrado como deseen. Es probable, por ejemplo, que para el primer inciso se obtengan resultados como:

$x^2 + x + x + 1$
$1 + x^2 + x + x$
$1 + 2x + x^2$
$x^2 + 2x + 1$

Cuando lo considere pertinente pida la confrontación de resultados de manera grupal. Si surgen diferentes maneras de expresar sus cálculos, éstos se analizarán para que los alumnos observen que se trata de expresiones equivalentes (reduciendo términos semejantes y ordenando los términos).

Se pretende que sean los alumnos quienes encuentren la siguiente regla, aunque no la expliciten de la misma manera:

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

En este momento puede pedir a los alumnos que exploren lo que sucede cuando, en vez de ser $x + 1$, el valor del lado del cuadrado es $x - 1$ (haciendo la multiplicación $x - 1$ por $x - 1$). Si es necesario puede probar con otras expresiones.

3 Pida a los alumnos que hagan lo que se indica a continuación (de manera individual):

> a) Piensen en un número del 1 al 10.
> b) Súmenle 2.
> c) Eleven el resultado al cuadrado.
> d) Réstenle cuatro veces el número que pensaron.

Pida a varios alumnos que digan el resultado al que llegaron y *adivine* el número que pensaron.

Proponga que, después de hacer la actividad varias veces, se organicen en ternas y sigan la siguiente instrucción:

> Encuentren el truco que permite adivinar el número.

¿Cómo hacerlo?

Llamemos x al número que piensa cada alumno.

Entonces:

a) Piensen en un número del 1 al 10.	x
b) Súmenle dos.	$x + 2$
c) Eleven el resultado al cuadrado.	$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
d) Réstenle cuatro veces el número que pensaron.	$x^2 + 4x + 4 - 4x = x^2 + 4$

Para *adivinar* el número pensado bastará con restar 4 al resultado y después extraer su raíz cuadrada. Veamos un ejemplo numérico:

a) Piensen en un número del 1 al 10.	8
b) Súmenle dos.	10
c) Eleven el resultado al cuadrado.	100
d) Réstenle cuatro veces el número que pensaron.	$100 - 32 = 68$

Cuando un alumno diga que obtuvo 68, reste 4 a 68, cuyo resultado es 64, y extraiga su raíz cuadrada: 8.

El rango del 1 al 10 para pensar un número se deja a criterio de usted. Si el número fuera mayor, entonces puede permitir que los alumnos utilicen calculadora; los números incluso pueden ser negativos o racionales (aunque con estos últimos los cálculos podrían complicarse). También puede modificarse el paso *b)* (sumando o restando otro número), con lo cual debera cambiarse, obviamente, el paso *d)*.

Si a ningun alumno se le ocurre, puede sugerir que, como *el número pensado* no se conoce, pueden expresarlo con una letra. Se espera que con esta *pista* los alumnos harán un análisis similar al descrito que les permitirá saber por qué se puede adivinar el número pensado.

Si el tiempo lo permite y lo juzga conveniente, haga la siguiente sugerencia a los alumnos:

> Inventen otras secuencias de *Piensa un número* con las que se pueda adivinar el número pensado.

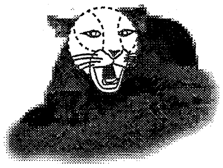
4 Para seguir trabajando con el cuadrado de un binomio se sugiere que los alumnos hagan tarjetas para elaborar un dominó y jugarlo en equipos de cuatro (fotocopie el anexo B de este fichero).

VARIANTES

1. Las actividades 3 y 4 pueden ser realizadas para estudiar el producto de dos binomios con un término común.
2. Se sugiere aprovechar los productos notables para actividades de cálculo mental.

¿Aprobar el examen sin estudiar?

Tema 11: Problemas de probabilidad



Propósito Aplicar la simulación para resolver problemas.
Contenidos Solución por simulación de problemas de probabilidad.
Material Una caja (urna) y cuatro canicas del mismo material y tamaño: tres del mismo color (blancas) y una de otro color (roja). Una hoja que contenga números del 1 al 20 (en columna) y debajo de cada número los incisos *A*, *B*, *C* y *D*: los números designarán los reactivos y las letras las opciones.

1 Comente que en la zona metropolitana del Distrito Federal los alumnos deben presentar un examen para ingresar a una escuela del nivel medio superior, la cual es asignada a cada alumno en función del número de aciertos que obtienen en el examen. Después de organizarlos en equipos de tres o cuatro alumnos, entrégueles la hoja numerada y plantee el siguiente problema:

> Para ser aceptado en la escuela que prefiere, Juan necesita contestar correctamente 17 reactivos o más; para simplemente ser aceptado, aunque sea en otra escuela, necesita obtener al menos 10 aciertos; y si contesta correctamente nueve reactivos o menos, no podrá ingresar a ninguna escuela. El examen que Juan resolverá consta de 20 reactivos; cada reactivo tiene cuatro opciones, de las cuales sólo una es correcta. Considerando que contestará todo el examen al azar:
> a) ¿Entrará Juan en la escuela que prefiere?
> b) ¿Entrará aunque sea en otra escuela?
> c) ¿Juan no ingresará a ninguna escuela?

Una estrategia que los alumnos pueden utilizar es la siguiente: en cada reactivo elegirán la opción que consideran correcta, y después preguntarán a usted si las opciones elegidas fueron acertadas o no. Otra manera de investigar la *suerte* de Juan consiste en simular la situación utilizando las canicas y la urna. Si no se les ocurre la manera de utilizar ese material, puede dar algunas orientaciones; por ejemplo:

- ¿Cómo utilizarían las canicas y la caja para conocer la suerte de Juan?
- Si meten las cuatro canicas en la urna y extraen al azar una de ellas, ¿a qué conclusión podrían llegar si la canica es blanca?, ¿y si la canica extraída es roja?

Con las preguntas anteriores, los alumnos podrán concluir que el hecho de meter las cuatro canicas y extraer una al azar es equivalente a lo que Juan y ellos mismos hicieron al contestar el examen, sólo que ahora sabrán si la respuesta es correcta o no, esto es, si sale una canica blanca la respuesta será incorrecta, y si sale roja querrá decir que acertaron.

Conviene que los alumnos realicen la experiencia varias veces y registren en una tabla, como la que se muestra a continuación, los resultados obtenidos, de esta manera observarán que, al contestar al azar un examen de esa naturaleza, es muy probable que Juan no entre a estudiar a ninguna de las escuelas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	
Reactivos correctos									
Reactivos incorrectos									

2 Organice a los alumnos en parejas y comente que para resolver el siguiente problema van a considerar que otro alumno (Luis) ha presentado el examen para ingresar a una escuela del Distrito Federal.

> Después de haber resuelto el examen, Luis comentó que está seguro de haber contestado acertadamente la mitad de los 20 reactivos, aunque reconoció que la otra mitad la había resuelto al azar. De acuerdo con lo anterior:
> a) ¿Entrará Luis a la escuela que prefiere?
> b) ¿Entrará aunque sea a otra escuela?

Después de haber realizado la primera actividad, seguramente los alumnos pondrán en juego el modelo de la urna para resolver el problema. Es conveniente que sugiera a los alumnos que anticipen una respuesta en torno a la probabilidad que tiene Luis de ingresar a la primera o la segunda opción, de manera que confronten su pronóstico con los resultados que obtengan.

Por otra parte, es conveniente que, en una tabla similar a la realizada en la actividad 1, con el control de los reactivos correctos e incorrectos, los alumnos registren los resultados que obtengan después de realizar varias veces la experiencia. Los resultados mostrarán que lo más probable es que Luis quede ubicado en la segunda opción.

A manera de conclusión, los alumnos seguramente observarán que lo mejor que pueden hacer para aprobar un examen de este tipo es estudiar mucho, ya que contestar al azar incrementa en gran medida las posibilidades de reprobar.

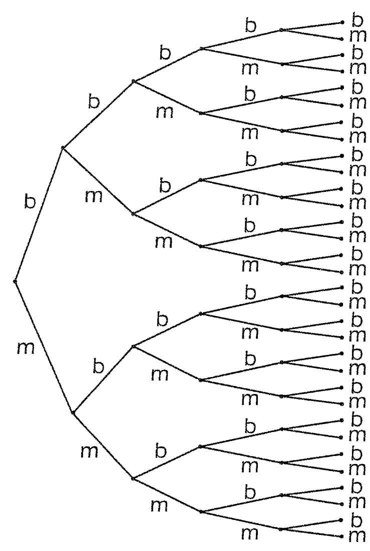
3 Organice al grupo en parejas y plantee el siguiente problema:

> Supongan que al contestar un examen de 10 reactivos, en el que cada reactivo tiene sólo dos opciones, están seguros de haber contestado bien cinco preguntas, mientras que las otras cinco fueron resueltas al azar.
> ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben el examen?

En esta situación, después de haber resuelto las actividades 1 y 2, los alumnos se darán cuenta de que el problema puede abordarse por medio de la simulación con la urna y, aunque en este caso sólo necesitarán una canica de cada color, procederán de manera similiar. Como en las actividades 1 y 2, es conveniente que los alumnos registren en una tabla los resultados que obtengan después de realizar en varias ocasiones la experiencia.

Es importante señalar que la probabilidad en este caso estará expresada en términos de la probabilidad frecuencial, es decir:

$$\frac{\text{Número de casos que al ser observados fueron favorables}}{\text{Total de observaciones}}$$



Sin embargo, puede orientar a los alumnos para que obtengan la probabilidad en términos del modelo clásico. Esto se puede hacer si primero pide que supongan que el examen tenía cinco reactivos, con dos opciones cada uno, y que fue contestado al azar.

Utilizando un diagrama de árbol, los alumnos podrán analizar diferentes casos.

Por ejemplo, la probabilidad de que los cinco reactivos se contesten correctamente es 1/32, puesto que sólo uno de los 32 caminos tiene cinco letras *b*.

La probabilidad de que tenga cuatro correctas y una incorrecta es 5/32, porque se presentan cinco casos de los 32:

b b b b m
b b b m b
b b m b b
b m b b b
m b b b b

La probabilidad de que apruebe el examen es 31/32, ya que hay un solo caso en el que puede reprobar, a saber: cuando las cinco se hayan contestado mal.

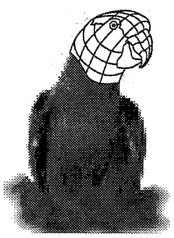
VARIANTES

Puede proponer a los alumnos los siguientes problemas:

1. Si un alumno no estudió y le dan a escoger entre resolver un examen que consta de cinco reactivos, cada uno con dos opciones, o resolver otro examen que consta de dos reactivos, cada uno con cinco opciones, ¿qué examen le conviene resolver, si suponemos que lo hará al azar? Fundamenten su respuesta.
2. La compañía *Chocolates baratos* tiene la siguiente promoción:
Una de cada cuatro envolturas de chocolate tiene grabada en su interior una estrella: si juntas tres envolturas con estrella, puedes canjearlas por una pluma. ¿Cuál es el menor número de chocolates que hay que comprar para tener cierta seguridad de reunir tres estrellas?

El pantógrafo

Tema 12: Dibujo a escala y homotecias



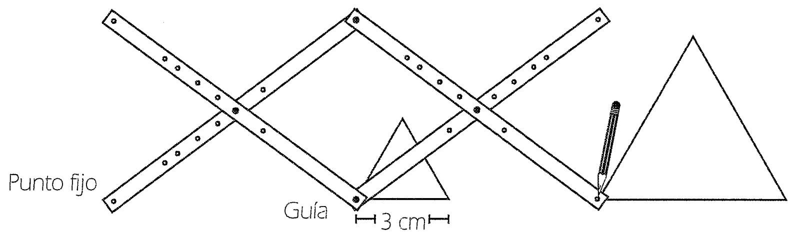
Propósito Desarrollar la imaginación espacial al realizar trazos a partir de homotecias y determinar algunas propiedades de las mismas, por ejemplo: paralelismo, congruencia de ángulos, etcétera.

Contenidos Estudio informal de las homotecias. Imagen bajo una homotecia de un triángulo, un cuadrilátero o un polígono.

Material Pantógrafo. Se anexa un instructivo para construir esta herramienta. Véase anexo C.*

1 Explique brevemente a los alumnos cómo utilizar el pantógrafo. Después plantee la siguiente situación, que realizarán en parejas:

Tracen un triángulo equilátero de 3 cm por lado.
Con el pantógrafo, armado a escala 2 a 1, tracen un segundo triángulo.



a) ¿Cómo es el triángulo resultante con respecto al triángulo original?
b) ¿Cómo son entre sí los lados correspondientes de estos triángulos? ¿Cómo son entre sí los ángulos correspondientes de los triángulos? Verifiquen su respuesta.
c) Considerando los vértices correspondientes de los triángulos, ¿están alineados respecto al punto fijo del pantógrafo?
d) ¿Cómo son las razones de las distancias entre el punto fijo del pantógrafo y los vértices correspondientes?

Indique a los alumnos que tengan cuidado al momento de realizar el trazo, de esta manera la medida de los lados del triángulo resultante será el doble de la medida original.

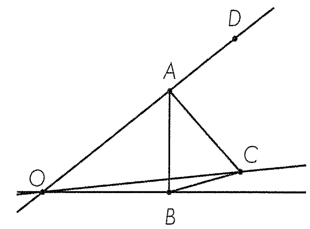
Es posible que algunos alumnos observen a simple vista la semejanza de las figuras. En este caso invíteles a que den argumentos relacionados con las propiedades de la semejanza, a partir de la comparación de las razones de los lados correspondientes. Esta situación puede ser propicia para recordar a los alumnos las propiedades de la semejanza. Por otra parte, para que las razones de los lados correspondientes sean iguales, se requiere medir con cierta precisión, por lo que es posible que los cocientes sean distintos a 1/2 o 2; en este caso usted puede generar una discusión en torno a la medición, de manera que los alumnos noten que la medición directa siempre es aproximada y, en consecuencia, es necesario realizar varias mediciones para obtener el promedio y así lograr una aproximación más exacta.

Para responder las preguntas del inciso *b)* los alumnos utilizarán diferentes estrategias. Algunos, por ejemplo, usarán las escuadras para determinar el paralelismo de los lados correspondientes, algunos determinarán la congruencia de los ángulos utilizando el transportador, en tanto que otros podrán aplicar sus conocimientos de la semejanza. Para responder la pregunta *d)* también se requiere precisión en la medición, por lo que usted debe estar atento y observar cómo se realiza. Las preguntas *c)* y *d)* pueden ser el punto de partida para que dé a conocer a los alumnos las propiedades básicas de la homotecia.

*El pantógrafo que se utilice *no debe tener anotadas las escalas*. Este instrumento fue inventado alrededor de 1603 por el astrónomo alemán Cristolph Scheiner.

2 Organice al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos y plantee la siguiente situación:

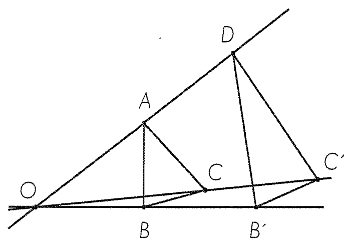
Dibujen un triángulo isósceles (con medidas, respectivamente, de 3, 4 y 4 cm en sus lados). Marquen un punto O fuera del triángulo y tracen rectas, que unan el punto exterior con cada uno de los vértices del triángulo. Marquen un punto D, en una de las rectas, como se indica a continuación.



El punto D, marcado en la línea, es uno de los vértices de un triángulo que es homotético al triángulo ABC:

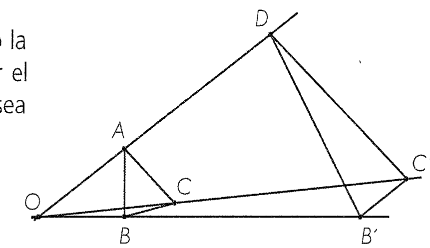
a) Utilicen sus instrumentos de geometría y tracen la figura geométrica que es homotética al triángulo ABC.

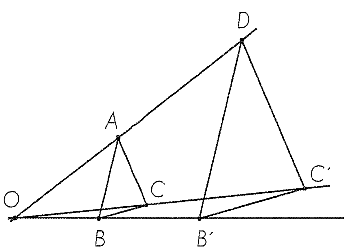
b) ¿Cuál es la razón de homotecia?



Construir un triángulo homotético al triángulo dado, de acuerdo con las indicaciones señaladas, plantea algunas dificultades: algunos alumnos, por ejemplo, podrían considerar que basta con medir la distancia que va del punto *A* al punto *D*, y luego llevar dicha distancia sobre cada una de las otras dos rectas tomando como punto de partida los vértices *B* y *C*. En este caso los alumnos se darán cuenta de que la figura que resulta no es semejante, ya sea porque se observe a *simple vista*, o bien porque las razones de los lados correspondientes al ser comparados, no serán iguales.

Otros alumnos considerarán que la figura homotética se consigue llevando la distancia *OD* a las otras dos rectas a partir de los vértices *B* y *C*; al trazar el triángulo los alumnos se darán cuenta de que la figura no es semejante, ya sea a *simple vista* o mediante la comparación de las razones.





Otros alumnos tomarán en cuenta los resultados obtenidos en la actividad 1, es decir, considerarán que en una figura homotética los lados son paralelos a los correspondientes de la figura original. Entonces, a partir del punto *D*, trazarán paralelas a los lados *AB* y *AC*, de manera que obtendrán los puntos *B´* y *C´* que se encuentran en la intersección de las otras dos rectas.

La razón de homotecia se puede obtener de dos formas:

- Estableciendo la razón de los lados homólogos de los triángulos, esto es: $\frac{DB'}{AB} = \frac{DC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$
- Estableciendo la razón entre la distancia del punto O al punto *A* y la distancia del punto O al punto *D*, es decir:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{O'C'}{OC}$$

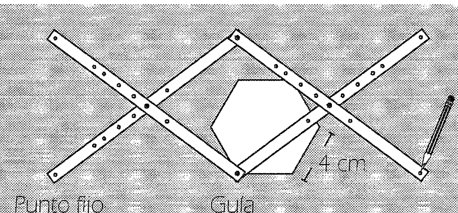
De cualquier manera es necesario considerar que, dado que el punto *D* se elige arbitrariamente, los alumnos obtendrán razones distintas. Por otra parte, es necesario que recuerde a los alumnos hacer una medición lo más exacta posible, de manera que en una misma figura las razones sean iguales.

VARIANTE

Puede sugerir la actividad que se plantea a continuación:

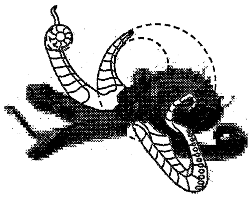
Utilizando el pantógrafo, armado a escala 3 a 1, obtengan la figura homotética de un hexágono regular que mida 4 cm por lado. Después contesten la siguiente pregunta:

¿Cuál es la razón de homotecia?



Pitágoras en el geoplano

Tema 13: Semejanza y teorema de Pitágoras



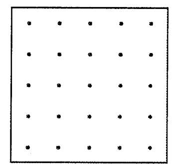
Propósito Utilizar las fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, así como los teoremas de semejanza, de Pitágoras y la trigonometría para resolver numerosos problemas de cálculo geométrico.

Contenidos Aplicaciones de los teoremas de semejanza y de Pitágoras en la solución de problemas de cálculo geométrico.

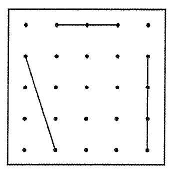
Material Calculadora, geoplano de 5 x 5 y ligas (por alumno).

1 Una vez que haya organizado en equipos de cuatro a los alumnos, propóngales la siguiente actividad:

> *Encuentren en su geoplano todos los segmentos de diferentes longitudes que pueden formarse y calculen la longitud de cada uno redondeada a centésimos (tomen como unidad a la distancia horizontal o vertical entre dos clavos).*



Se debe aclarar que los segmentos pueden estar en cualquier posición: horizontal, vertical o inclinada.



Se espera que los alumnos encuentren *todos* los segmentos y calculen sus longitudes. Dé el tiempo suficiente y, cuando lo considere conveniente, pida a los equipos:

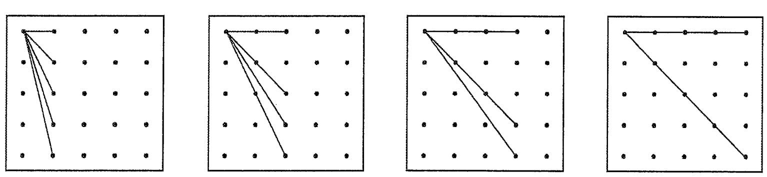
a) Que digan el número de segmentos de diferente longitud que encontraron.

b) Un representante del equipo que haya encontrado el mayor número de segmentos pasará a mostrarlos en su geoplano y anotará en el pizarrón las diferentes longitudes calculadas.

Los resultados se confrontarán con los encontrados por otros equipos y se discutirá hasta llegar a un acuerdo sobre el número de segmentos y sus respectivas longitudes calculadas correctamente.

En caso de que no se llegue a descubrir que son 14 segmentos, promueva que continúen con la discusión (mostrando, por ejemplo, si se afirma que son menos de 14, algún segmento que ningún equipo haya encontrado y si se dice que son más de 14, mostrando los segmentos con la misma longitud).

Una manera sistemática de hallar todos los segmentos pedidos es la siguiente:



Se podrá comprobar que cualquier otro segmento tiene la misma longitud que alguno de los 14 mostrados. Las longitudes, en orden ascendente y redondeadas a centésimos, son:

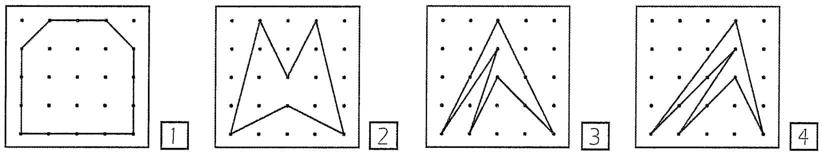
1, 1.41, 2, 2.24, 2.83, 3, 3.16, 3.6, 4, 4.12, 4.24, 4.47, 5 y 5.66.

La actividad permite practicar el cálculo de longitudes aplicando el teorema de Pitágoras, así como usar la calculadora para encontrar raíces cuadradas y redondear cantidades. Aproveche para reafirmar aquellos contenidos en los que los alumnos tengan deficiencias.

2 Con la misma organización y los materiales de la actividad 1, plantee lo siguiente:

Encuentren el hexágono de mayor perímetro posible en el geoplano de 5 x 5.

Los alumnos se darán cuenta de que pueden formar diferentes hexágonos en un geoplano de este tamaño:



Promueva una competencia para ver cuál equipo encuentra el hexágono de mayor perímetro. Para los hexágonos anteriores, los perímetros son:

Geoplano	Cálculo del perímetro (aproximado)	Resultado (aproximado)
1	1.41 + 2 + 1 + 1.41 + 3 + 4 + 3	15.82 *u*
2	4.12 + 2.24 + 2.24 + 4.12 + 2.24 + 2.24	17.2 *u*
3	4.47 + 4.47 + 2.83 + 2.24 + 3.16 + 3.61	20.78 *u*
4	5 + 4.12 + 2.24 + 2.83 + 3.61 + 4.24	22.04 *u*

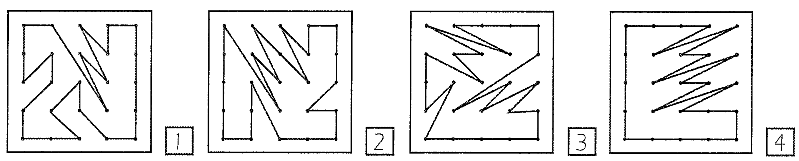
Con lo que se muestra que, de esos cuatro hexágonos, el que tiene el mayor perímetro es el número 4. Esto no significa que el hexágono 4 sea el de mayor perímetro que se puede formar, pues es probable que haya otros.

Esta actividad permitirá a los alumnos repasar el cálculo de perímetros, así como usar la calculadora para resolver operaciones, comparar números decimales, etcétera.

3 Nuevamente organizados en equipos de cuatro, proponga a los alumnos una extensión del problema anterior:

Encuentren el polígono de mayor perímetro posible que se puede formar en un geoplano de 5 x 5.

Es conveniente recordar a los estudiantes que la liga no debe cruzarse consigo misma. Al tratar de resolver el problema, los alumnos explorarán los diferentes polígonos que pueden formarse, por ejemplo:



Calculando el perímetro de los cuatro polígonos anteriores, tenemos:

Geoplano	Perímetro del polígono
1	32.97 *u*
2	34.62 *u*
3	38.84 *u*
4	38.90 *u*

El polígono que muestra el geoplano número 4 es el de mayor perímetro de los cuatro aquí mostrados, no obstante, es probable que los alumnos encuentren otros de mayor perímetro.

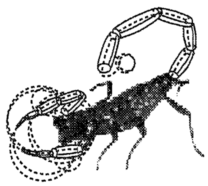
Al igual que la actividad anterior, ésta puede ser aprovechada para reafirmar lo que son los polígonos convexos y cóncavos, los ángulos convexos y cóncavos, así como para utilizar el teorema de Pitágoras en el cálculo de longitudes, usar la calculadora para resolver operaciones con decimales (básicamente raíz cuadrada y suma) y comparar números decimales.

VARIANTES

1. La actividad 2 puede plantearse con otro tipo de figuras: cuadriláteros, pentágonos, etcétera.
2. Para las actividades 2 y 3 puede pedir que calculen el área de los hexágonos o polígonos formados.

Patrones y ecuaciones

Tema 14: Ecuaciones cuadráticas completas



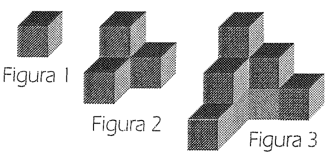
Propósito Obtener y resolver ecuaciones cuadráticas.

Contenidos Solución de ecuaciones cuadráticas de las formas: $ax^2 = 0$; $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$

Material Cubos, hojas que contengan la secuencia de cubos que se muestra en la actividad 1 y geoplano de 8 x 8.

1 Organice al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos. A continuación propóngales que resuelvan el siguiente problema:

Observen la sucesión numerada de dibujos que se muestra a continuación.



a) Construyan (con los cubos o mediante dibujos) las figuras 4 y 5 que siguen en la sucesión.
b) ¿Cuántos cubos tendrá la figura 100 de la sucesión?
c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número de cubos de cualquier figura que esté en la sucesión?
d) Si se sabe que una de las figuras que forman la sucesión tiene 2 704 cubos, ¿qué número corresponde a esa figura en la sucesión?

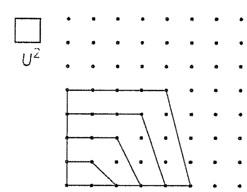
La pregunta *a)* tiene la finalidad de que los alumnos centren su atención en la manera como se construyó la sucesión, por lo que no tendrán dificultad para construir las figuras 4 y 5. Para las preguntas *b)* y *c)* tal vez sea necesario dar a los alumnos alguna orientación, por ejemplo, indicarles que elaboren una tabla como la que se muestra enseguida y pedir que en ella anoten el número de cubos que tienen las primeras figuras de la sucesión.

Número de la figura	1	2	3	4	5
Cubos que tiene la figura	1	4	9		

A partir del análisis de la tabla, algunos alumnos encontrarán que la sucesión se genera con la expresión n^2. El inciso *d)* es el caso inverso de la pregunta *b)*. Algunos alumnos podrán hacer uso de la estimación para encontrar que la figura 52 es la que tiene 2 704 cubos. Otros quizás se den cuenta de que la solución se obtiene al encontrar la raíz cuadrada de 2 704. Es conveniente que oriente a los alumnos para que observen que de una u otra forma están resolviendo la ecuación $n^2 = 2\,704$.

2 Organice al grupo en equipos de cuatro alumnos. Pídales que construyan en el geoplano la secuencia de trapecios que se observa a continuación y después plantee las siguientes preguntas:

a) Observen cómo se han construido los trapecios que se muestran en el geoplano. Construyan los dos trapecios que siguen en la sucesión.
b) Calculen el área de cada uno de los seis trapecios.
c) Si continúan con la construcción de los trapecios, ¿cuál será el área del trapecio que ocupe el lugar 100?
d) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el área de cualquier trapecio que esté en la sucesión?
e) Si se sabe que el área de uno de los trapecios es de 588 u^2, ¿qué número corresponde, en la sucesión, a ese trapecio?



A partir de los incisos *a)* y *b)*, los alumnos observarán la sucesión con la que se construyen los trapecios, y por otra parte encontrarán alguna estrategia para calcular su área. Los incisos *c)* y *d)* llevarán a los alumnos a la generalización, esto es, a partir del análisis de algunos casos tendrán que determinar un procedimiento algebraico. Así, es probable que ciertos alumnos descompongan el trapecio en dos figuras: un cuadrado, cuyo lado es la base menor del trapecio, y un triángulo, de altura b y de base una unidad (u), de manera que el área se puede calcular como: $A = b^2 + b/2$, donde b es la base menor del trapecio.

Posiblemente otros alumnos hallen una expresión equivalente si aplican la fórmula para calcular el área de un trapecio. Considerando que la base mayor es igual a la base menor más 1, y que la altura es igual a la base menor, la expresión quedaría:

$$A = \frac{(B + b)\,h}{2} \text{ sustituyendo } \frac{[(b + 1) + b]\,b}{2} = \frac{(2b + 1)\,b}{2} = \frac{2b^2 + b}{2}$$

El inciso *e)* es el caso inverso. La respuesta esencialmente tiene que ver con la solución de la ecuación: $b^2 + b/2 = 588$. Una estrategia que algunos alumnos pueden emplear es la estimación, es decir, propondrán un valor para b y, al sustituirlo en la expresión, lo ajustarán hasta obtener 588.

Posteriormente puede proponer algún otro procedimiento para resolver ecuaciones de ese tipo, por ejemplo, la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado, o bien la factorización del trinomio.

3 Organice a los alumnos en equipos y plantee las siguientes preguntas.

a) Observen, a partir de la actividad 1, que en la figura 1 es posible ver tres caras del cubo, y que en la figura 2 se pueden ver nueve caras de los cubos que la forman. ¿Cuántas caras es posible ver en la figura 3? ¿Cuántas en la figura 4?

b) Si se continúa con la construcción de las figuras, ¿cuántas caras sería posible ver en la figura que ocupe el lugar 15?

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el total de caras será que es posible ver en cualquier figura que esté en la sucesión?

d) ¿Qué número corresponde en la sucesión a la figura en la que es posible ver 153 caras de los cubos que la forman?

Una manera que puede facilitar el conteo de las caras es que los alumnos construyan con cubos cada figura. Seguramente algunos alumnos, después de analizar los primeros términos de la sucesión de números que indican las caras que se ven, podrán anotar los siguientes términos, sin embargo será difícil que encuentren la expresión algebraica que genera la sucesión. Por esta razón es pertinente que los oriente, como se indica a continuación.

Señale que la expresión que se busca es una expresión de segundo grado, ya que la segunda diferencia de los términos de la sucesión es constante, como se muestra en la tabla siguiente:

	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
Caras que se ven	3	9	17	27	39
Primera diferencia		9 − 3 = 6	17 − 9 = 8	27 − 17 = 10	39 − 27 = 12
Segunda diferencia		8 − 6 = 2	10 − 8 = 2	12 − 10 = 2	

	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
Expresión que se obtiene al sustituir el valor de x	$a(1)^2 + b(1) + c =$ $a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c =$ $4a + 2b + c$	$a(3)^2 + b(3) + c =$ $9a + 3b + c$	$16a + 4b + c$	$25a + 5b + c$
Primera diferencia		$3a + b$	$5a + b$	$7a + b$	$9a + b$
Segunda diferencia		$2a$	$2a$	$2a$	

A continuación demuestre que a partir de la expresión $ax^2 + bx + c$ van a generar una sucesión y a obtener las diferencias respectivas.

Combinando estas relaciones con los resultados obtenidos en la sucesión generada por el conteo de las caras que son visibles, pueden establecer cualquiera de los tres siguientes sistemas de ecuaciones:

I	II	III
$2a = 2$ $3a + b = 6$ $a + b + c = 3$	$2a = 2$ $5a + b = 8$ $4a + 2b + c = 9$	$2a = 2$ $7a + b = 10$ $9a + 3b + c = 17$

Al resolver el primer sistema de ecuaciones se obtiene: $2a = 2$, entonces $a = 1$.
$3a + b = 6$; $3(1) + b = 6$, entonces $b = 3$.
$a + b + c = 3$; $1 + 3 + c = 3$, entonces $c = -1$.

De manera que la ecuación buscada es: $x^2 + 3x - 1$.

Una vez que los alumnos conozcan la expresión algebraica que permite conocer el número de caras que se pueden ver, podrán abordar la última pregunta y, en consecuencia, aplicarán sus conocimientos para resolver ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = d$.

VARIANTE

Puede plantear a sus alumnos el problema que se expone a continuación:

Observen la siguiente tabla, en ella se muestra una sucesión de números, así como el lugar que ocupa cada término.

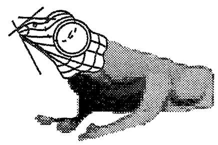
Lugar que ocupa	1	2	3	4	...
Término de la sucesión	2	5	10	17	...

a) ¿Qué expresión algebraica permite obtener cualquier número que forma parte de la sucesión?

b) El número 730 forma parte de la sucesión, ¿qué lugar ocupa en dicha sucesión?

Sólidos de revolución

Tema 15: Sólidos



Propósito Desarrollar la imaginación espacial mediante la generación de sólidos de revolución y el cálculo de volúmenes.

Contenidos Cilindros y conos de revolución.

Material Por equipos: un rectángulo de 12 x 6 cm (pueden ser otras medidas), un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 10 cm, y un triángulo rectángulo cuyos lados midan 9, 12 y 15 cm respectivamente.

1 Organice al grupo en equipos de cuatro alumnos. Pídales que tomen el rectángulo y que lo giren como se muestra en las siguientes figuras. A continuación plantee el siguiente problema:

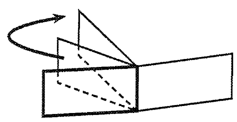


Figura 1

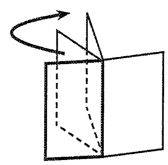


Figura 2

a) Al girar el rectángulo como se indica en la figura 1, ¿qué cuerpo se forma?
b) Al girar el rectángulo como se indica en la figura 2, ¿qué cuerpo se forma?
c) ¿Cuál de los dos cuerpos tiene mayor volumen? Anoten en su cuaderno lo que hayan considerado y después, para verificar su respuesta, calculen el volumen de cada uno de los cuerpos.

Para determinar que, al girar el rectángulo como se ha indicado, se genera un cilindro recto, los alumnos pondrán en juego su imaginación espacial.

El inciso *c)* seguramente deparará a los alumnos alguna sorpresa, pues muchos creerán que el cilindro más alto es el que tiene mayor volumen, y esto no es cierto.

El cálculo del volumen requiere de la determinación del radio del círculo y de la altura de cada cilindro: esta situación será una de las dificultades que los alumnos enfrenten. En un principio algunos considerarán que no se tiene suficiente información para calcular el volumen, pero seguramente se percatarán de que en el primer caso el largo del rectángulo corresponde al radio del círculo y el ancho a la altura del cilindro.

2 Para realizar esta actividad solicite a los alumnos que tomen el triángulo rectángulo isósceles y que lo giren como se indica a continuación:

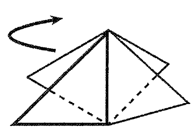


Figura 1

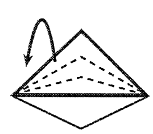


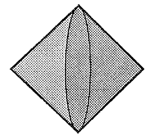
Figura 2

a) Al girar el triángulo rectángulo como se indica en la figura 1, ¿qué cuerpo se forma?
b) Al girar el triángulo rectángulo como se indica en la figura 2, ¿qué cuerpo se forma?
c) ¿Cuál de los dos cuerpos tiene mayor volumen? Anoten en su cuaderno lo que hayan considerado y después, para verificar su respuesta, calculen el volumen de cada uno de los cuerpos.

Como se puede observar, en el primer caso se genera un cono recto en el que la medida del cateto del triángulo corresponde a la altura del cono y también al radio de la base del mismo. Seguramente, a partir de la experiencia de la primera actividad, los alumnos observarán este hecho. Si algunos tuvieran dificultad para observarlo, puede proponer que tomen una escuadra de 45° y pedirles que la giren como se indicó, de esta manera podrán visualizar el cuerpo que se genera.

Para determinar el volumen del cono se requiere conocer la altura y el radio de la base, por lo que los alumnos no tendrán problemas para calcular el volumen.

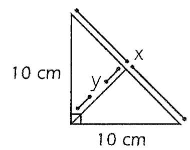
En el segundo caso, para reconocer el cuerpo que se genera al girar el triángulo, se requiere de una observación más cuidadosa. Quizás los alumnos tendrán dificultad para observar que se trata de dos conos que tienen una base común, como se muestra en la figura:



Si los alumnos no pueden reconocer el cuerpo, puede sugerirles, al igual que en el primer caso, que utilicen la escuadra de 45° y que la giren como se ha indicado.

El cálculo del volumen es una tarea que también puede complicárseles, ya que en este caso se requiere determinar, mediante algún procedimiento, el radio de la base común de los dos conos y la altura de los mismos. Si los alumnos no encuentran alguna estrategia, puede plantear algunas preguntas que los orienten. Por ejemplo: ¿Qué datos son los que requieren para calcular el volumen de los dos conos? ¿A qué medidas del triángulo corresponden la altura y el radio de la base de los conos? ¿Pueden calcular el área del triángulo? ¿Qué datos requieren para calcular el área del triángulo si consideran como base la hipotenusa del triángulo? ¿Pueden calcular la medida de la hipotenusa?, etcétera.

De esta manera algunos alumnos se darán cuenta de que como el triángulo es rectángulo, pueden calcular su área, pues conocen la base y la altura del mismo (medida del cateto), y que de igual manera pueden calcular la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras.



Este conocimiento les permitirá calcular el radio de la base del cono (que corresponde a la altura del triángulo, si se considera como base la hipotenusa) de la siguiente manera:

$$A = \frac{(10 \cdot 10)}{2} = 50 \text{ cm}^2$$

por lo que: $x = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14.14$ cm (considerando hasta centésimos).

$$50 \text{ cm}^2 = \frac{(x \cdot y)}{2}$$

Al despejar y se obtiene: $y = \dfrac{2\,(50 \text{ cm}^2)}{x}$ (donde y representa el radio de la base de los dos conos).

Otros alumnos se darán cuenta de que y se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras.

$$y = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Otros observarán que la altura de cada cono tiene la mitad de la longitud de x, que corresponde al valor de la hipotenusa del triángulo. Esto se puede ver si se dobla el triángulo sobre la longitud y.

Una vez que los alumnos hayan respondido las preguntas de los dos primeros incisos, el inciso *c)* será respondido sin mayor problema. Sin embargo será conveniente que los alumnos confronten su respuesta con la estimación que anotaron al principio en sus cuadernos.

VARIANTE

Puede sugerir la siguiente actividad:

Consideren un triángulo rectángulo con medidas 9, 12 y 15 cm, y gírenlo como se indica. Contesten las preguntas que aparecen debajo de las figuras.

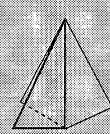


Figura 1


Figura 2

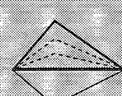
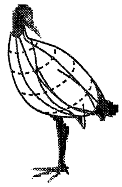


Figura 3

a) Al girar el triángulo rectángulo como se indica en la figura 1, ¿qué cuerpo se forma?
b) Al girar el triángulo rectángulo como se indica en la figura 2, ¿qué cuerpo se forma?
c) Al girar el triángulo rectángulo como se indica en la figura 3, ¿qué cuerpo se forma?
d) ¿Cuál de los tres cuerpos tiene mayor volumen? Anoten en su cuaderno lo que consideren y después, para verificar su respuesta, calculen el volumen de cada uno de los cuerpos.

Rampas para patinetas

Tema 16: Trigonometría: razones trigonométricas de un ángulo agudo (cálculo y primeras aplicaciones)



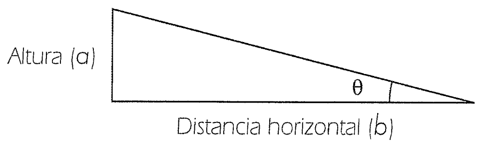
Propósito Utilizar la trigonometría para resolver problemas de cálculo geométrico.

Contenidos Primeros ejemplos para motivar el estudio de la trigonometría. Tangente de un ángulo agudo.

Material Juego de geometría y calculadora.

1 Organizados en equipos de cuatro o cinco alumnos, plantee el siguiente problema:

Se quieren construir rampas para una competencia de patinetas. Para medir el ángulo de inclinación de cada rampa, se considerarán dos medidas:



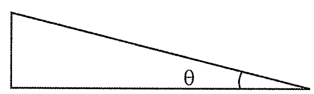
De acuerdo con las medidas especificadas, elijan aquella rampa cuyo ángulo de inclinación sea mayor en cada caso (las medidas están dadas en metros).

Caso	Rampa 1	Rampa 2
1	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.5$ $b = 7.5$
2	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 6.5$
3	$a = 1.5$ $b = 6$	$a = 2$ $b = 8$
4	$a = 1.6$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 7$

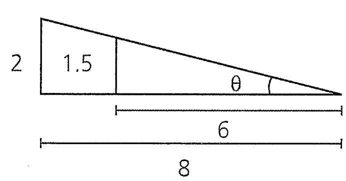
Dé tiempo suficiente a los alumnos para que elijan la rampa que consideren tiene mayor ángulo de inclinación en cada caso. Una vez que los equipos tengan las respuestas, pida que algún integrante pase al frente a darlas a conocer y que, además, explique el por qué eligieron tal o cual rampa.

Los equipos podrán hacer uso de diversas estrategias para resolver el problema. Una de ellas podrá ser el trazar los triángulos que representan las rampas a una escala adecuada, por ejemplo: 1 cm: 1 m.

Con lo que podrán notar (probablemente) la inclinación de cada rampa. Es posible que se les ocurra medir el ángulo de inclinación θ.



Otros equipos podrán notar que para los casos 1 y 2 es suficiente con analizar las medidas. Si a es igual en ambas rampas, la de mayor ángulo de inclinación es aquella en la que b es menor; si b es igual, entonces la de mayor ángulo de inclinación es aquella en la que el valor de a es mayor.



Para el caso 3 se espera que los alumnos hagan uso de lo visto en el tema 13 (semejanza) y noten que la inclinación de las rampas es la misma.

El caso 4 es el que ofrece mayor dificultad, incluso si se hace el trazo a escala. Posiblemente los alumnos lleguen por azar a la respuesta correcta, sin embargo, el hecho de que tengan que validar sus respuestas hará que busquen argumentos lógicos.

Lo ideal sería que a ciertos equipos se les ocurriera establecer la relación o razón que existe entre la altura de la rampa y la distancia horizontal recorrida:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{altura de la rampa}}{\text{distancia horizontal}}$$

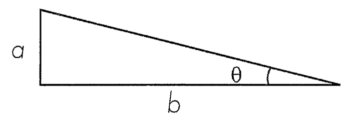
Y comparar estos cocientes para saber cuál rampa tiene mayor ángulo de inclinación. Por ejemplo, para el caso 4:

Rampa 1	Rampa 2
$\frac{1.6}{6.5} = 0.2461$	$\frac{1.7}{7} = 0.2428$

Con lo que se aprecia que la rampa 1 tiene mayor ángulo de inclinación.

Si no se les ocurriese, es conveniente que proponga este procedimiento y aproveche este momento para mencionar a los alumnos que esa razón se llama tangente del ángulo θ.

Tangente del ángulo $\theta = \frac{a}{b}$.

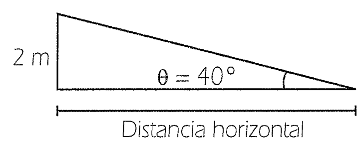


Y que ésta es una medida que permite calcular el ángulo de inclinación de la rampa. Dicho ángulo de inclinación puede calcularse, mediante la división *a/b* , haciendo uso de la calculadora o de las tablas para encontrar la medida del ángulo θ. Se sugiere que en este momento defina a sus alumnos la tangente de un ángulo agudo como la razón del cateto opuesto entre el cateto adyacente, y que les muestre cómo calcularla, así como ilustrar el caso de cómo calcular el ángulo dada la tangente.

El caso 3 y los conocimientos que sobre semejanza tienen los alumnos, pueden ser utilizados para que exploren el hecho de que el valor de la tangente es el mismo para ángulos con la misma medida, aun cuando pertenezcan a triángulos rectángulos con catetos de diferente medida (la razón se conserva).

2 Nuevamente organizados en equipos, plantee el siguiente problema:

> *Se quiere construir una rampa cuya altura sea de 2 m y que forme un ángulo de 40° con el piso. ¿Cuál será la distancia horizontal que tendrá la base de la rampa?*



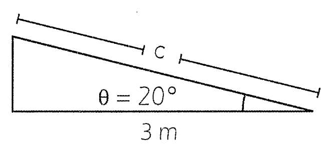
Esta actividad es una extensión de la anterior y supone que el alumno:

- Sabe que la tangente del ángulo es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.
- Sabe calcular la tangente de un ángulo dado haciendo uso de la calculadora o de las tablas.

Se trabajará bajo la misma dinámica que en el problema anterior: dé tiempo suficiente para que los equipos busquen la respuesta correcta, socialicen sus estrategias y validen los resultados en forma grupal.

3 Plantee a los equipos el siguiente problema:

> *Calculen la longitud c de la siguiente rampa:*



Básicamente el tratamiento es análogo al de los problemas anteriores, pero en este caso los alumnos tendrán que hacer uso (además de la función tangente) del teorema de Pitágoras.

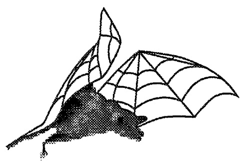
Este último problema puede ser aprovechado para introducir la función coseno.

VARIANTE

Se sugiere trabajar el problema 2 de la página 268 del *Libro para el maestro*, con el fin de complementar el uso de la tangente cuando se requiera determinar la pendiente o el ángulo de inclinación.

Para medir polígonos regulares

Tema 17: Problemas de trigonometría



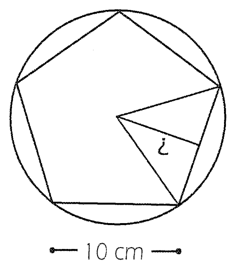
Propósitos Utilizar las relaciones trigonométricas para resolver problemas de cálculo geométrico. Estudio de los polígonos regulares.

Contenidos Resolución de triángulos rectángulos y sus aplicaciones. Estudio de los polígonos regulares.

Material Juego de geometría y calculadora.

1 Proponga al grupo resolver el siguiente problema en equipos de cuatro o cinco alumnos:

a) Calculen el perímetro y el área de un pentágono regular que mide 10 cm por lado.



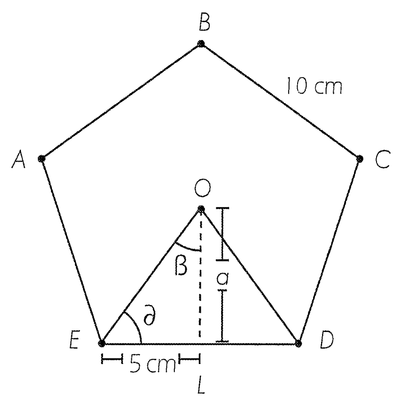
b) Utilizando funciones trigonométricas, calculen el perímetro y el área de un heptágono, un octágono, un eneágono, etcétera, cuyos lados midan 20 cm respectivamente.

El cálculo del perímetro del pentágono no representará dificultad para los alumnos, mas no así el cálculo del área.

Para calcular el área, algunos equipos pueden construir el polígono considerando las medidas reales. Una vez hecho lo anterior, obtendrán las medidas necesarias para efectuar los cálculos.

Otros equipos pueden construir a escala el pentágono y después, aplicando sus conocimientos relacionados con la semejanza, obtendrán el área.

A partir de las soluciones de los alumnos, puede orientarlos para resolver el mismo problema utilizando funciones trigonométricas, en particular la función tangente. Así, la apotema del pentágono se puede expresar en función de uno de los ángulos del triángulo rectángulo *OEL*, como se muestra enseguida:



$\tan \partial = \frac{a}{5}$, entonces:

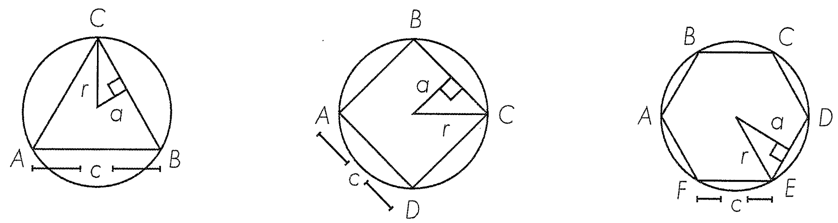
$a = 5\,(\tan \partial)$

Por otra parte, para calcular el valor de la tangente del ángulo ∂, que mide 54, pueden utilizar la calculadora o las tablas. Una vez que se obtiene el valor de la apotema, el área se calcula utilizando la fórmula correspondiente.

Para responder el inciso *b)*, los alumnos tendrán que aplicar sus conocimientos de geometría para determinar el ángulo central o el ángulo interno de los polígonos. Si los alumnos tienen dificultades, puede hacer un breve recordatorio o dar algunas orientaciones para salvar este obstáculo. Por otra parte, quizás sea necesario que los oriente en el uso de las funciones trigonométricas para encontrar el área de cada polígono.

2 Para resolver los siguientes problemas, organice al grupo en equipos de cuatro o cinco alumnos.

1. Utilizando los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°, en función del radio (r) expresen: el valor de un lado (c), la apotema (a) y el área (S) de los polígonos regulares siguientes:



Al igual que en los problemas anteriores, los alumnos deben determinar el valor del ángulo central o interior de cada uno de los polígonos.

Es conveniente que observe el trabajo de los alumnos, de manera que, en caso necesario, haga las orientaciones que considere convenientes.

En el caso del triángulo, si se considera el ángulo de 30°, las siguientes son expresiones que los alumnos podrán encontrar:

$$c = 2r\,(cos\ 30);\ a = r\,(sen\ 30);\ S = 3r^2\,(cos\ 30)(sen\ 30).$$

Con la finalidad de que los alumnos observen que las expresiones encontradas son correctas, puede asignar un valor al radio y pedir que determinen la medida de un lado, la apotema y el área utilizando las expresiones encontradas. Después pida que calculen dichas medidas con otro procedimiento.

VARIANTES

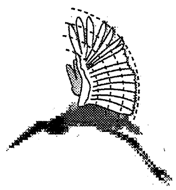
1. En la tabla que se muestra a continuación están dadas las medidas de un lado, así como la apotema, el perímetro y el área de los polígonos regulares de tres lados (triángulo equilátero) y seis lados (hexágono regular) inscritos en un círculo que tiene 10 cm de radio. Completen la tabla para los polígonos regulares de 12, 24 y 48 lados que también están inscritos en un círculo que mide 10 cm de radio. ¿Qué relaciones descubren después de que han completado la tabla? Coméntenlo con sus compañeros y escriban sus conclusiones.

Número de lados	Lado	Apotema	Perímetro	Área
3	17.32	5.00	51.96	129.90
6	10.00	8.59	60	258.58
12				
24				
48				

2. Un polígono regular de 12 lados tiene de área 24 unidades cuadradas. ¿Cuánto miden sus lados? ¿Cuánto miden los radios de los círculos inscrito y circunscrito? ¿Y si el polígono regular tuviera 8, 9, 10, 18... lados?

Calculando áreas

Tema 18: Fracciones algebraicas

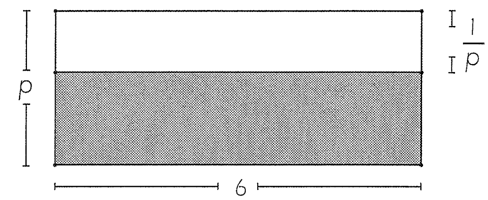


Propósitos Practicar procedimientos algebraicos. Usar el lenguaje algebraico al operar con literales.

Contenidos Revisión y expresión simbólica de operaciones con fracciones algebraicas (casos sencillos: multiplicación, división y suma).

1 Organice a los alumnos en parejas y plantee el siguiente problema:

Observen la siguiente figura:



Calculen el área de la parte sombreada, considerando que el valor de p es mayor a 1.

Para determinar el área de la parte sombreada, los alumnos pueden proceder de dos formas.

Algunos encontrarán primero el área del rectángulo completo ($6p$), después el área del rectángulo blanco, y finalmente las restarán para obtener el área sombreada.

Otros alumnos primero obtendrán la medida del ancho del rectángulo sombreado y después calcularán su área.

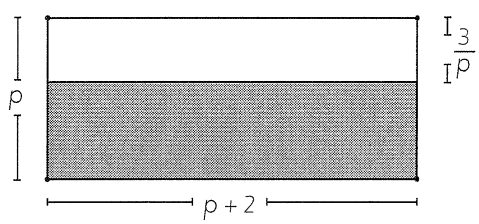
En cualquiera de los dos procedimientos es posible que algunos alumnos se equivoquen al efectuar las operaciones. Si es así, usted y los propios alumnos pueden dar algunas ideas para corregir los errores.

El área de la parte sombreada es igual a:

$$\left(\frac{(6p^2 - 6)}{p}\right)$$

2 Plantee a los alumnos el siguiente problema. Pídales que lo resuelvan en parejas y advierta que deben tener cuidado al realizar las operaciones.

Calculen el área de la parte sombreada.



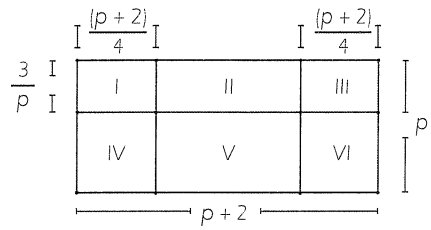
Al igual que en la actividad anterior los alumnos pueden seguir dos procedimientos para encontrar el área de la parte sombreada. En cada caso pueden cometer errores que será necesario analizar con ayuda de usted.

Cualquiera que sea el procedimiento que utilicen, encontrarán que el área de la parte sombreada es igual a:

$$p^2 + 2p - \frac{6}{p} - 3$$

3 Organice al grupo en parejas y proponga el siguiente problema:

Calculen el área de los rectángulos I, II, III, IV, V y VI. Comprueben que la suma corresponde al área total del rectángulo.



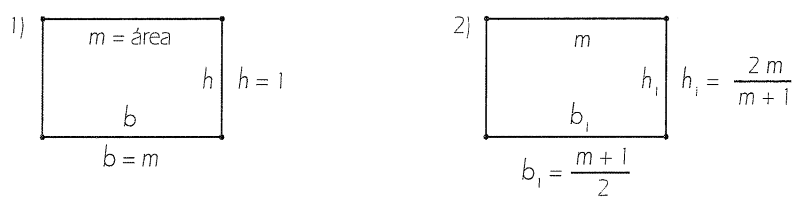
El problema es similar a los dos anteriores, sin embargo ahora los alumnos tendrán que efectuar mucho más operaciones y esto aumenta la probabilidad de que se equivoquen.

Una gran ventaja de este problema es que los alumnos por sí solos pueden controlar el resultado, puesto que la suma de las áreas parciales debe coincidir con el resultado de multiplicar $p\ (p + 2)$, que es muy fácil de obtener.

Una tarea importante de usted en esta actividad es animar a los alumnos para que no desistan de efectuar los cálculos.

4 Una vez que los alumnos se encuentren organizados en equipos, proponga la siguiente situación:

A continuación se ilustra otra manera de calcular aproximaciones de la raíz cuadrada de un número m, utilizando el método babilónico. Escriban las dos siguientes aproximaciones. Tomen en cuenta que para escribir la siguiente aproximación deben considerar las expresiones del segundo rectángulo.



Si lo considera conveniente, explique a los alumnos cómo se procedió para determinar la segunda aproximación, esto es, dado que el área del rectángulo se calcula con la expresión $m = bh$, en el segundo rectángulo la base es el promedio de la base y la altura del primer rectángulo, es decir: $b = (m + 1) / 2$.

Al sustituir este valor en la expresión $m = bh$, resulta $m = (m + 1) / 2(h)$, y al despejar h, se obtiene el valor correspondiente en el segundo rectángulo.

Para obtener las siguientes dos aproximaciones, los alumnos tendrán que operar con fracciones algebraicas. Es necesario que observe el trabajo de los alumnos para que detecte las dificultades y errores que cometan.

Una vez que los alumnos hayan obtenido las expresiones algebraicas que se requieren, es conveniente que tome en cuenta casos particulares para verificar que las expresiones obtenidas permiten calcular la raíz cuadrada correspondiente.

La calculadora es un buen auxiliar para verificar las aproximaciones que se hagan.

VARIANTE

Puede proponer a los alumnos la siguiente actividad:

Consideren que r es una medida mayor o igual a 2. Calculen el área de la parte sombreada.